FOLIA SCANDINAVICA
VOL. 12 POZNAŃ 2011

WIELOKROPEK

JERZY POGONOWSKI

Adam Mickiewicz University, Poznań

Tekstu niniejszego nie należy traktować z przesadną powagą. Piszemy o pewnym znaku interpunkcyjnym – wielokropku – używanym zarówno w językach etnicznych, jak i w tekstach matematycznych. Wskazujemy na niektóre funkcje wielokropka, przede wszystkim w tekstach matematycznych. Trochę (nieszkodliwie) fantazjujemy. Współczesne pokolenia otrzymują takie nazwy jak np.: pokolenie JPII, pokolenie dot.com. Piszący te słowa uważa, że wspólnie z Jubilatem, któremu tekst jest dedykowany, Panem Profesorem Witoldem Maciejewskim, należymy do Pokolenia Wielokropka. Przekonanie to uzasadniamy w Dodatku do tego tekstu.[1]

1. WIELOKROPEK JAKO ZNAK INTERPUNKCYJNY

Na temat użycia znaków interpunkcyjnych w języku polskim można znaleźć informacje w opracowaniach językoznawczych, zob. np. Angełowa 1982, 1985, Podracki 1998, Łuczyński 1999. W polskiej terminologii, obok *kropki* oraz *dwukropka* występuje *wielokropek*. Ten ostatni znak interpunkcyjny ma postać trzech kropek umieszczonych horyzontalnie u dołu wiersza. Nie jest jasne, dlaczego nie nazywamy go *trójkropkiem* – może dlatego, że nie używamy *czterokropka*, *pięciokropka*, itd. Mamy więc śmieszną analogię z systemami liczebnikowymi w niektórych językach, np. australijskich. W języku angielskim wielo-

[1] Tekst nawiązuje do odczytu pod tym samym tytułem, wygłoszonego podczas konferencji *Zastosowania Logiki w Filozofii i Podstawach Matematyki*, *X* w Szklarskiej Porębie w maju 2005 roku. Uprzejmie dziękuję Organizatorom: Panom Profesorom Januszowi Czelakowskiemu (Uniwersytet Opolski, Piotrowi Wojtylakowi (Uniwersytet Śląski) oraz Janowi Zygmuntowi (Uniwersytet Wrocławski) za zaproszenie do wygłoszenia odczytu. Mój udział w tej konferencji finansował Uniwersytet im. Adama Mickiewicza.

kropek nazywany jest *dots* albo *triple dots*. O użyciu wielokropka tak pisze Łuczyński (Łuczyński 1999:164f.):

> Sprawa użycia wielokropka nie zajmuje wiele miejsca w wydawnictwach normatywnych. Właściwie wszędzie wyróżnia się 3 podstawowe funkcje tego znaku: sygnalizowanie przerwy w toku mówienia, poprzedzanie nieoczekiwanych (mogących zaskoczyć czytelnika) fragmentów tekstu oraz zaznaczanie opuszczonego fragmentu cytatu. Zwraca się też uwagę na użycie wielokropka w celu osiągnięcia jakiegoś efektu artystycznego w tekstach naśladujących żywą mowę.

Według autora cytowanej wyżej monografii, wielokropek:

- sygnalizuje miejsce o szczególnym znaczeniu w tekście,
- zachęca do refleksji,
- sugeruje możliwość uzupełnienia tekstu,
- sygnalizuje zmianę wątku,
- zastępuje (wzmacnia) kropkę, zastępuje przecinek,
- jest znakiem końca wypowiedzi urwanych,
- jest znakiem przerwy w mówieniu (skandowanie, jąkanie),
- jest znakiem wahania się mówiącego,
- przygotowuje odbiorcę na coś nieoczekiwanego (zaskakująca puenta),
- zaznacza skrócenie cytatu, przytoczenia, tytułu,
- pełni funkcję wykropkowania (np. dla uniknięcia wulgaryzmów).

Wielokropek jest stosunkowo nowym i raczej rzadko używanym znakiem interpunkcyjnym. Jego występowania w tekstach literackich są o wiele mniej zdeterminowane niż występowania pozostałych znaków interpunkcyjnych (wynika to, oczywiście, z pełnionych przezeń funkcji).

Odpowiednikiem wielokropka w mowie jest np. pauza, zawieszenie głosu, wspomagane czasem stosownym gestem, itp. Na marginesie, zauważmy, że wielokropek w piśmie związany jest także z użyciami skrótów w rodzaju: itd., itp., i in.

Sposób traktowania wielokropka (i innych znaków interpunkcyjnych) w algorytmach ortograficzno-fonematycznych omówiono np. w Batóg, Steffen-Batogowa 1977, Steffen-Batóg, Nowakowski 1992. Dokładniejsza charakterystyka wielokropka w polszczyźnie dokonana została np. w artykule Angełowa 1982.

Wielokropek (osadzony w nawiasach) był „twórczym wkładem" cenzury prewencyjnej w literaturę, publicystykę, a nawet wiadomości prasowe w Polskiej Rzeczpospolitej Ludowej. Towarzyszyło mu zwykle powołanie się na słynną Ustawę o Kontroli Prasy, Publikacji i Widowisk. Czasami uzyskiwano w ten sposób (niezamierzony chyba) efekt komiczny (zob. np. wiadomości cenzurowane w *Tygodniku Powszechnym* oraz piosenkę *Życiorys* wykonywaną w *Piwnicy pod Ba-*

ranami, podane w Dodatku). Cenzura w PRL pozwalała sobie czasami na życzliwe dowcipy: w sierpniu 1982 roku otrzymałem z Uniwersytetu w Tybindze list, na kopercie którego był wielki stempel: **NIE cenzurowano**. Cenzura w Rzeczpospolitej Polskiej jest, w odczuciu piszącego te słowa, mniej wyrafinowana: np. cenzura kościelna polega albo na demagogicznej wrzawie albo na wyniosłym, lekceważącym wszystkich, watykańskim przemilczaniu spraw niewygodnych dla kościoła hierarchicznego. Nowym zjawiskiem jest cenzura komercyjna (używamy terminu stosowanego przez prof. Marię Janion) będąca częścią merkantylnych mechanizmów kształtujących upodobania (może lepiej: odruchy) konsumpcyjne obywateli w zakresie uczestnictwa w kulturze.

Z wielokropkiem wiąże się pośrednio wiele ważnych zjawisk składniowych, np. elipsa. Z kolei, zjawiska takie jak elipsa stwarzają istotne problemy dla matematycznych opisów języków etnicznych (np. w gramatykach kategorialnych).

Wydaje się, że nie we wszelkiego rodzaju tekstach wolno używać wielokropków: pomyślmy np. o tekstach prawniczych, wojskowych, ustawie zasadniczej, przepisach kulinarnych, tekstach skonwencjonalizowanych modlitw.

W poradnikach obsługi programów do edycji tekstu zwraca się uwagę na (śmieszne) niejednoznaczności (rozpoznania) użycia wielokropka w edytorach tekstu produkowanych przez firmy, których nazw z litości tu nie wspomnimy. W porządnych systemach przetwarzania tekstu wielokropek uzyskujemy stosowną komendą sterującą.

Interesujący się historią ortografii czytelnik znajdzie stosowne informacje w literaturze przedmiotu: zob. np.: Jodłowski 1979, Łoś 1917, Saloni 2005. Jeśli chodzi o wielokropek, to o ile nam wiadomo, dla przykładu:

- w Mecherzyńskiego *Prawidłach pisania* (Kraków, 1841) dotychczas nieznane użycie wielokropka zostaje sprecyzowane i dokładnie określone w ośmiu rozmaitych pozycjach stosowania;
- nazwami wielokropka były: znak opuszczonych głosek lub wyrazów, znak przerwania mowy, znak zamyślenia, znak zamilczenia, domyślnik, kropki, wielokropek (od 1935 roku);
- wielokropek składał się z nieokreślonej liczby kropek aż do skonwencjonalizowania w postaci trzech kropek, przed rokiem 1895.

Angełowa (1985) ustala (na podstawie danych: I. *Popiół i diament*, II. rozmowy telefoniczne), że wypowiedzi dialogowe zakończone wielokropkiem prawie zawsze mają swoje wyrażone *explicite* uzupełnienie (w I. 91procent, w II. 70 procent).

2. WIELOKROPEK W LITERATURZE

W dość powszechnej opinii literaturoznawców, (nad)używanie wielokropka jest stylistycznie naganne. Z wdziękiem pisze o tym Umberto Eco w felietonie

Jak stawiać wielokropek (Eco 1993). Pisarzy od pisarzy niedzielnych odróżnia, zdaniem Eco, m.in. sposób posługiwania się wielokropkiem. Otóż pisarz niedzielny jest nieśmiały w używaniu metafor: wielokropek jest dla niego usprawiedliwieniem zbyt śmiałej (w jego mniemaniu) figury retorycznej, przepustką pozwalającą dokonywać rewolucji, ale z pozwoleniem policyjnym w kieszeni. Pisarze piszą dla innych pisarzy, a pisarze niedzielni piszą dla sąsiadki lub kierownika urzędu pocztowego. Pisarze biorą na siebie odpowiedzialność za rozszerzanie języka, pisarze niedzielni drżą z obawy, że będą niezrozumiali dla czytelnika.

Eco zwraca też uwagę na wielość implikatur (swobodnie) odtwarzanych z zastosowań wielokropka (mających wzbudzić podejrzenie, że wyrażenie na pierwszy rzut oka dosłowne jest w istocie figurą retoryczną), Eco 1993:137:

> A gdyby tylko Marks i Engels napisali: „Widmo krąży po Europie, widmo … komunizmu", poddaliby tym samym w wątpliwość groźny i nieuchwytny charakter komunizmu i rewolucja rosyjska wybuchłaby o pięćdziesiąt lat wcześniej, może nawet za zgodą cara, więc wziąłby w niej udział Mazzini.
>
> A gdyby napisali: „Widmo … krąży po Europie"? Więc nie krąży? Tkwi w miejscu? Ale gdzie? A może chodzi i o to, że widma, jak przystało na widma, ukazują się i znikają znienacka, w mgnieniu oka, i nie tracą czasu na żadne krążenie? To jeszcze nie koniec. Czyżby chcieli zaznaczyć, że przesadzają, że widmo chwała Bogu miota się w okolicach Trewiru, więc gdzie indziej można spać nadal spokojnie? A może chcieli napomknąć o tym, że widmo komunizmu nęka już Amerykę, a kto wie, czy nie Australię?

Czytelnika zainteresowanego opinią literaturoznawców na temat wartości stylistycznych związanych z użyciem wielokropka wypada nam skierować do odnośnych dzieł z poetyki teoretycznej i stosowanej, teorii literatury, itp.

O wielokropku wdzięcznie jest tworzyć aforyzmy, ze względu na jego często chuligańskie zachowania w tekstach. Wiele takich aforyzmów, lepszych lub gorszych, znajdujemy w Internecie, np.:

> Wielokropek często zastępuje brak myśli.
>
> * * *
> Gdy pytano na pogrzebie,
> dlaczego poeta nie żyje,
> odpowiadano uroczyście,
> że to wielokropek go zabił…

3. WIELOKROPEK W TEKSTACH MATEMATYCZNYCH

Tak to już jest z wyrażeniami (formułami) matematycznymi: są one jednoznaczne składniowo. Za zabawne ćwiczenie uważamy np. przyłożenie do formuł matematycznych schematu Jakobsona lub maksym konwersacyjnych Grice'a. Oczywiście, matematycy też ludzie, a więc czasem np. z lenistwa lub innych energooszczędnych powodów dopuszczają się niejednoznaczności w oznaczeniach. Z reguły jednak tego typu „drogi na skróty” i tym podobne uproszczenia mogą zostać wyeliminowane; np. kontekst użycia danego symbolu przesądza o jego znaczeniu.

Czy warto w ogóle zajmować się ortografią, a w szczególności interpunkcją w matematyce? W istocie, sprawa notacji matematycznej bywa problemem o fundamentalnym znaczeniu. Notacja nie tylko musi być jednoznaczna, powinna również być przejrzysta oraz wygodna. Wymaga się od niej także koherencji: notacja nie powinna być całkiem dowolna, ważne jest, aby notacja pozwalała łatwiej uchwycić związki składni z semantyką.

Bywa jednak tak, że nawet dobrze przemyślana notacja przegrywa w konkurencji z innymi, wymuszonymi przez tradycję. Tak było np. w przypadku notacji ideograficznej Frege’go: ze względu na jej dwuwymiarowość stawała się niepraktyczna w użyciu, które preferuje zapisy liniowe. Również ciekawa notacja Leśniewskiego dla funktorów rachunku zdań, w których symbol funktora odwoływał się do jego semantyki nie pozostała w użyciu. Sukces odniosła natomiast *notacja polska*, zwana też prefiksową, wprowadzona przez Łukasiewicza. W notacji tej symbol funktora poprzedza symbole swoich argumentów. Pozwala to na całkowitą eliminację nawiasów.

Czym zatem jest interpunkcja w *formułach* matematycznych? Przede wszystkim służy do zapewnienia jednoznaczności składniowej formuł. Znanych jest niezliczone mnóstwo notacji matematycznych, zainteresowanego czytelnika odsyłamy np. do dzieła Cajori 1993. Profesor Roman Suszko mawiał jednak podobno, że i tak stale brakuje mu oznaczeń.

Logicy i matematycy pożyczają od lingwistów pewne terminy językoznawcze dla opisu rozważanych języków formalnych. Dla zbioru wykorzystywanych symboli używa się terminów: *alfabet* lub *słownik*. Reguły tworzenia wyrażeń złożonych z wyrażeń prostszych to reguły *składniowe*. Relacje *spełniania* (formuły w strukturze przez wartościowanie) oraz *prawdziwości* (zdania w strukturze) nazywane są relacjami *semantycznymi*. Terminu *morfologia* używa się, za Alfredem Tarskim, dla opisów strukturalnych wyrażeń języka przedmiotowego w metajęzyku.

Na marginesie dodajmy, że ciekawym problemem wydaje się znalezienie (odpowiedników?) konstrukcji metaforycznych w matematyce: nie ma ich w językach przedmiotowych poszczególnych teorii; można próbować odnajdywać jakieś analogie tego typu ewentualnie w metajęzyku. Definicje metafory w językach etnicznych odwoływać się chyba powinny do czynników pragmatycznych; nadto, metafory lingwistyczne to jakby residua/anomalie w jakoś-tam rozumianych automorfizmach przestrzeni znaczeń.

W tekstach logicznych i matematycznych wielokropek spotykamy dość często. Podstawową jego funkcją jest tu zastąpienie niektórych z wyliczanych elementów. „Wymowa” wielokropka jest jednak zupełnie inna w matematyce niż w literaturze: w tekstach matematycznych wielokropka – z reguły – używamy, gdy **dokładnie wiadomo**, co zastępuje jego użycie, gdy nie ma niejasności, co należałoby zamiast wielokropka napisać. Gdy więc piszemy np.: $a_1, a_2, \ldots, a_7$, to jasne jest, iż wielokropek zastępuje tu napis: a_3, a_4, a_5, a_6. Podobnie, nawet jeśli nie jest ustalona liczba n, to zapis $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ jest całkowicie jednoznaczny i zrozumiały.

Użycie wielokropka jest również usprawiedliwione, gdy np. wiemy **jak** obliczyć wartość funkcji dla danego argumentu, choć wartości tej nie znamy. Rozważmy znany przykład. Dla dowolnych $m > 0$ oraz $n > 0$ niech:

$$Ack\,(0, n) = n + 1$$

$$Ack\,(m, 0) = Ack\,(m, n - 1, 1)$$

$$Ack\,(m, n) = Ack\,(m - 1, Ack\,(m, n - 1))$$

Wprowadźmy też oznaczenia:

$$A_m\,(n) = Ack\,(m, n)$$

$$A\,(n) = A_n\,(n)$$

Funkcję $A\,(n)$ nazywamy *funkcją Ackermanna*. Jest ona funkcją rekurencyjną (choć nie jest pierwotnie rekurencyjna). Wartości funkcji Ack oraz A „rosną bardzo szybko”. Wartość Ack (4, 2) ma w zapisie dziesiętnym 19729 cyfr. Dla wszystkich $n > 1$ mamy:

$$A_4\,(n) = 2^{A_4\,(n-1)+3} - 3.$$

Dla wszystkich $m > 0$ wartość $A_m\,(n)$ jest równa kolejno:

$$A_m\,(n) = A_{m-1}\,(A_m\,(n - 1)) =$$

$$= A_{m-1}\,(A_{m-1}\,(A_m\,(n - 2))) =$$

$$= A_{m-1}\,(A_{m-1}\,(A_{m-1}\,(A_m\,(n - 3)))) =$$

$$\ldots$$

$$= A_{m-1}\,(A_{m-1}\,(\ldots\, A_{m-1}\,(A_m\,(0))\, \ldots)) =$$

$$= A_{m-1}\,(A_{m-1}\,(\ldots\, A_{m-1}\,(A_{m-1}\,(1))\, \ldots)).$$

W ostatnim z tych wyrażeń mamy n + 1 iteracji funkcji A_{m-1}. Mamy ponadto: $A_1(1) = 2$, $A_2(1) = 3$, $A_3(1) = 13$, $A_4(1) = 65533$. Czytelnika należy jednak lojalnie uprzedzić, aby nie strawił reszty żywota doczesnego (czego i tak będzie za mało), próbując obliczyć np. $A_4(4)$.

W praktyce, możemy obliczyć wartość jedynie niewielu początkowych wartości funkcji Ackermanna. Mówiąc „humanistycznie": ze względu na coraz mocniejsze iteracje operacji potęgowania występujące przy obliczaniu kolejnych wartości funkcji Ackermanna, otrzymanie tych wartości leży poza możliwościami najszybszych obecnie dostępnych komputerów. Tutaj więc poczciwy wielokropek maskuje naszą niemoc technologiczną, ale również coś więcej: w skończonym Wszechświecie (który ma, w przybliżeniu, 10^{80} atomów) nie ma dość miejsca, aby zapisać wartość funkcji Ackermanna dla argumentu równego, powiedzmy, liczbie lat naszego Jubilata (gdybyśmy np. chcieli umieścić jedną cyfrę rozwinięcia dziesiętnego tej wartości na jednym atomie). Czytelnika zainteresowanego bardzo dużymi liczbami zachęcamy do poczytania m.in. o *notacji strzałkowej* Knutha (zob. np. Conway, Guy 1999).

Wspomnimy o jednej jeszcze sprawie dotyczącej „bardzo szybko rosnących" funkcji. *Reprezentacją liczby m przy zasadzie n* nazywamy przedstawienie liczby m jako sumy potęg liczby n tak, aby użyte wykładniki były mniejsze bądź równe n. *Ciągiem Goodsteina dla liczby m* nazywamy ciąg $(m_k)_{k\in\omega}$ taki, że:

- $m_0 = m$, $m_k = G_{k+1}(m_{k-1})$, dla $k > 0$, gdzie funkcje $G_n(m)$ definiujemy następująco:
- jeśli $m = 0$, to $G_n(m) = 0$;
- jeśli $m \neq 0$, to $G_n(m)$ jest liczbą otrzymaną przez zastąpienie w reprezentacji liczby m przy zasadzie n liczby n przez liczbę $n+1$ i odjęcie *1* od całości.

Dla przykładu, rozważmy ciąg Goodsteina rozpoczynający się od liczby $m_0 = 266$ (ze względów typograficznych piszemy tu, dla operacji potęgowania, $x\,\hat{}\,y$ zamiast x^y):

$m_0 = 266 = 2\hat{}(2\hat{}(2 + 1)) + 2\hat{}(2 + 1) + 2\hat{}1$

$m_1 = G_2(m_0) = (3\hat{}(3\hat{}(3 + 1)) + 3\hat{}(3 + 1) + 3\hat{}1) - 1 =$
$= 3\hat{}(3\hat{}(3 + 1)) + 3\hat{}(3 + 1) + 2 \approx 10\hat{}38$

$m_2 = G_3(m_1) = (4\hat{}(4\hat{}(4 + 1)) + 4\hat{}(4 + 1) + 2) - 1 =$
$= 4\hat{}(4\hat{}(4 + 1)) + 4\hat{}(4 + 1) + 1 \approx 10\hat{}616$

$m_3 = G_4(m_2) = (5\hat{}(5\hat{}(5 + 1)) + 5\hat{}(5 + 1) + 1) - 1 =$
$= 5\hat{}(5\hat{}(5 + 1)) + 5\hat{}(5 + 1) \approx 10\hat{}10000$

…

Jak widać, wyrazy tego ciągu stają się dość szybko bardzo duże. Czy zatem znowu wezwiemy na pomoc wielokropek? Oczywiście wiemy, ***w jaki sposób*** liczyć kolejne wyrazy dowolnego ciągu Goodsteina, ale ***w praktyce*** obliczenia te są niewykonalne, z przyziemnych powodów. Tu jednak czeka nas niespodzianka, i to podwójna. Choć ciągi Goodsteina początkowo „rosną bardzo szybko”, to jednak każdy taki ciąg ma od pewnego miejsca wszystkie wyrazy równe 0. Dla $m_0 = 4$ mamy $m_k = 0$ od $k = 3 \cdot 2\hat{}\,402653211$. *Zdaniem Parisa-Kirby'ego* nazwiemy zdanie φ o postaci: $\forall m \exists k(m_k = 0)$. Zachodzi następujące *Twierdzenie Parisa-Kirby'ego*:

– *Zdanie φ jest prawdziwe w modelu standardowym arytmetyki. W konsekwencji, w aksjomatycznej teorii arytmetyki Peana PA nie można udowodnić negacji tego zdania.*
– *W PA nie można udowodnić zdania φ.*
– *W konsekwencji, zdanie φ jest niezależne od PA.*

Tak więc, skromne i cierpliwe odejmowanie jedynki od kolejnych wyrazów dowolnego ciągu Goodsteina prowadzi do ustabilizowania wszystkich, oprócz skończonej liczby, wyrazów tego ciągu na wartości zero. Jest to **prawda arytmetyczna**: zachodzi ona w świecie liczb naturalnych (w modelu standardowym arytmetyki). Jest to jednak prawda **nieosiągalna** metodami dowodowymi samej aksjomatycznej teorii liczb (arytmetyki Peana PA). Dowód zdania Parisa-Kirby'ego wymaga odwołania się do mocniejszych metod dowodowych niż te dostępne w PA. Zwróćmy uwagę, że zdanie Parisa-Kirby'ego ma wyraźną treść matematyczną, w odróżnieniu od znanego zdania nierozstrzygalnego w arytmetyce PA skonstruowanego przez Kurta Gödla, które ma treść metamatematyczną.

Wreszcie, nieco mniej „poważne” użycie wielokropka. Czytelnikowi kącików łamigłówek z wielokropkiem kojarzą się rzecz jasna także różne (śmieszne?) „testy na inteligencję” w rodzaju: znajdź prawidłowość w ciągu $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ gdzie podane a_i są konkretnymi liczbami. Czy rozwiązując taką łamigłówkę zawsze masz pewność, iż istnieje tylko jedno jej rozwiązanie?

3.1. METAJĘZYKOWE UŻYCIE WIELOKROPKA

Nie potrafimy w tym momencie wskazać, kto i dla jakich poszczególnych celów po raz pierwszy proponował użycia wielokropka w tekstach matematycznych. W monumentalnym dziele *A History of Mathematical Notations* Floriana Cajoriego nie znajdujemy informacji na ten temat. Niegdyś dla wyrażenia „*i tak dalej, do nieskończoności*” używano znaku *&c* (*et cetera*, zob. np. Euler 1796).

Polska norma (PN-68/N-01050, s. 1, *Podstawowe oznaczenia matematyczne*) wymienia dwa zastosowania wielokropka:

– Wielokropek oznaczający „itd. do…”

$n = 1, 2, 3, \ldots, m, \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

– Wielokropek oznaczający „itd. do nieskończoności”

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

– Pod znak wielokropka można podstawić jakąś liczbę wartości matematycznych, możliwych do określenia dzięki znanej regule wyznaczania tych wartości.

– W matematyce wielokropek zatem substytuuje jakiś szereg wartości liczbowych, oznacza pominięcie czegoś, co na podstawie reszty zapisu można odtworzyć.

W każdym razie, wydaje się, że znakomita większość użyć tego symbolu (lub symboli funkcjonalnie mu równoważnych) to użycia *metajęzykowe*. Oprócz wspomnianych już eliptycznych zapisów dla wyliczeń elementów jakiegoś zbioru lub ciągu, wielokropek występuje także np. w:

– zaznaczaniu (dowolnego, nieokreślonego lub określonego) kontekstu;

– definicjach warunkowych (to też pewnego rodzaju wyliczenia);

– zaznaczaniu iterowania operacji.

Oto przykłady zapisów tych rodzajów:

– Rozważmy zbiór $\{x \in y : \ldots x \ldots\}$, gdzie … … zastępuje dowolny warunek wyrażony w języku L, dotyczący x.

– Niech funkcja g będzie określona warunkowo:

  - $g(x) = f_0(x)$, gdy $h_0(x) = 0$
  - …
  - $g(x) = f_s(x)$, gdy $h_s(x) = 0$.

– Niech $s^{(n)}(x)$ oznacza $s(s(\ldots s(x) \ldots)))$, gdzie operację s iterujemy n razy.

3.2. JAK WIELOKROPEK ZMAGA SIĘ Z NIESKOŃCZONOŚCIĄ

A jak rzecz ma się z wyliczaniem elementów zbiorów nieskończonych? Powinno być tak samo, tzn. użycie wielokropka w takim wyliczeniu powinno dać się jednoznacznie zastąpić konkretnymi elementami rozważanego zbioru.

Oczywiście, procedura taka jest fizycznie niewykonalna. Czyżby więc była to jedynie użyteczna i bezpieczna konwencja? Mogę np. powiedzieć:

– *Weźmy zbiór wszystkich liczb naturalnych*: $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

albo też powiedzieć:

– *Weźmy zbiór wszystkich liczb naturalnych*: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

i w każdym z tych przypadków będzie *jasne*, co zastępują trzy kropki. A może jasne jest *jedynie*, jaki następny element ma wystąpić, aby przedłużyć rozpoczęte wyliczenie?

Podobną sytuację mamy, gdy wyliczamy liczby pierwsze: *2, 3, 5, 7, 11, ...* Wiadomo, że jest ich nieskończenie wiele, wiadomo, jak przekonać się czy dowolna dana liczba jest pierwsza.

Pytanie o ową *jasność* wiąże się oczywiście z liczącym sobie ponad dwa tysiące lat sporem o status nieskończoności *aktualnej*, w odróżnieniu od nieskończoności *potencjalnej*. Współczesna matematyka – wbrew Arystotelesowi – dopuszcza operacje na *całych* zbiorach nieskończonych, akceptuje więc, inaczej niż Stagiryta, nieskończoność *aktualną*. Jedynie odosobnione stanowiska konstruktywistyczne w matematyce pozostają przy akceptacji wyłącznie nieskończoności *potencjalnej*.

Pytania powyższe, na pierwszy rzut oka może bardzo naiwne, łączą się także oczywiście z pytaniem o możliwość kategorycznego scharakteryzowania modelu zamierzonego arytmetyki. Wiemy, że twierdzenie Gödla o niezupełności możliwość taką wyklucza: w języku logiki pierwszego rzędu nie można scharakteryzować standardowego modelu arytmetyki w sposób kategoryczny. Tak więc, w tej roli (wyliczania elementów zbioru nieskończonego) poczciwy wielokropek staje się odrobinę tajemniczy. Jest tak również za sprawą innego twierdzenia metalogicznego, a mianowicie Twierdzenia Löwenheima-Skolema. Na mocy tego twierdzenia, jeśli teoria (w języku pierwszego rzędu) jest niesprzeczna, to ma model przeliczalny, czyli taki, którego uniwersum jest równoliczne ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych. Nadto, jeśli teoria (w języku pierwszego rzędu) ma jakikolwiek model nieskończony (i nie ma modeli skończonych), to ma też model dowolnie wysokiej mocy nieskończonej. Logika pierwszego rzędu nie rozróżnia zatem mocy nieskończonych. W konsekwencji, żadna (niesprzeczna) teoria w jej języku nie może być kategoryczna, czyli opisywać swojego modelu z dokładnością do izomorfizmu.

Czy inne jeszcze twierdzenia metalogiczne również mają jakieś znaczenie dla interpretowania użyć wielokropka w matematyce? Można próbować upierać się, że istotnie tak jest. Wykorzystajmy w tym celu różne *aksjomaty nieskończoności* rozważane w teorii mnogości.

Jak wiadomo z teorii mnogości, hierarchia nieskończonych liczb kardynalnych jest *pozaskończona*. W skali alefów „odległości" między poszczególnymi jej elementami są różnej „długości"; tak więc, w wyliczeniach zbiorów o różnych mocach nieskończonych wielokropek wielokropkowi nierówny, podobnie, gdy piszemy np.:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$$

$$\aleph_0, \aleph_\omega, \aleph_{\aleph_\omega}, \ldots,$$

to wielokropki zapełniają w każdym z tych przypadków *pustacie o różnej przepastności*. Wreszcie, skala tzw. dużych liczb kardynalnych wymaga naprawdę czarodziejskich butów, aby po niej wędrować. Oczywiście, ostatnie dwie uwagi mają charakter jedynie metaforyczny. Coś nam się przecież wesołego od czasu do czasu należy.

Andrzej Mostowski (1967) zwraca uwagę na dwie ogólne zasady, które umożliwiają sformułowanie nieskończenie wielu *aksjomatów nieskończoności*. Pierwsza z nich może zostać nazwana *zasadą przechodzenia od nieskończoności potencjalnej do aktualnej*. Znajdujemy ją (w formie nieświadomej, pisze Mostowski) już u Dedekinda. Wychodząc od jakiegoś przedmiotu S_0 tworzy Dedekind przedmioty S_1, S_2, … i twierdzi następnie, że istnieje *zbiór* złożony z tych wszystkich przedmiotów (ten ostatni krok nie jest prawomocny, o ile nie przyjmiemy stosownych aksjomatów). We współczesnej aksjomatycznej teorii mnogości przyjmuje się *aksjomat nieskończoności*, który (wraz z *aksjomatem zastępowania*) czyni ten krok prawomocnym. W nieco bardziej złożonej postaci ta sama zasada występuje na przykład w sformułowaniu aksjomatu istnienia liczb nieosiągalnych. Uniwersum wszystkich zbiorów jest zamknięte ze względu na pewne operacje, co można odczytać w ten sposób, iż uniwersum to jest *potencjalnie* nieskończone. Możemy teraz sformułować aksjomat stwierdzający, że istnieje zbiór x (pewien element tego uniwersum), który sam jest zamknięty na te operacje; przy tym ów warunek zamkniętości można wyrazić na różne sposoby (zależnie od tego, czy nakładamy jakieś ograniczenia w aksjomacie zastępowania, tj. np. czy rozpatrujemy tylko funkcje definiowalne). Dalsze zastosowania omawianej ogólnej zasady związane są z różnymi wersjami *zasad odbicia*, orzekających, iż pewna własność całego uniwersum (wyrażana formułą języka teorii mnogości) przysługuje także już jakiemuś zbiorowi z tego uniwersum. Posługując się tą omówioną wyżej pierwszą zasadą uzyskać można liczby kardynalne słabo i mocno nieosiągalne, liczby nieosiągalne pierwszej klasy Mahlo oraz wyższych klas Mahlo. Mostowski pisze (Mostowski 1967:102):

> Dalsze, jeszcze silniejsze aksjomaty nieskończoności otrzymujemy za pomocą drugiej zasady, którą nazwiemy *zasadą istnienia zbiorów osobliwych*. Zasada ta jest mniej ściśle sformułowana niż poprzednia. Stosuje się ona w następujących sytuacjach. Przypuśćmy, że konstruując zbiory za pomocą operacji opisanych w aksjomatach teorii mnogości, które przyjęliśmy dotychczas, napotykamy stale na zbiory o pewnej własności P. Jeśli nie ma oczywistych powodów, które skłaniałyby nas do przyjęcia twierdzenia, że każdy zbiór ma własność P, to przyj-

> mujemy nowy aksjomat, stwierdzający, że istnieją zbiory nie posiadające własności *P*. W tym sformułowaniu zasada jest oczywiście zbyt nieokreślona, aby można ją przyjąć i ogólnie stosować. Jest jednak faktem, że niektóre aksjomaty teorii mnogości zostały – prowizorycznie co prawda – przyjęte jako „hipotezy robocze" w oparciu tylko o sformułowaną wyżej zasadę.

Mostowski podaje jako przykłady stosowania tej zasady m.in.: pewien aksjomat sformułowany jeszcze przez Mahlo (stwierdzający istnienie liczby ρ_0) oraz aksjomat liczb mierzalnych (w różnych postaciach). Dodaje też (Mostowski 1967:103):

> Dowody niezależności aksjomatów nieskończoności są na ogół łatwe. Natomiast nie ma żadnej nadziei na uzyskanie dowodów ich względnej niesprzeczności. Drugie twierdzenie Gödla o niezupełności pokazuje, że dowód względnej niesprzeczności nie mógłby być formalnie przeprowadzony w teorii mnogości. Wobec tego, co powiedzieliśmy wyżej o rekonstrukcji matematyki w teorii mnogości, nie jest łatwo zdać sobie sprawę jak wyglądałby taki nieformalizowalny dowód. Musimy więc stwierdzić, że nie ma racjonalnych podstaw do przyjmowania mocnych pewników nieskończoności.

Na wczesnych etapach rozwoju aksjomatycznej teorii mnogości, jeszcze przed uzyskaniem przez Gödla jego twierdzeń o niezupełności próbowano tak rozbudować aksjomatykę tej teorii, aby wyznaczała ona jednoznacznie uniwersum (wszystkich) zbiorów. Poszukiwano więc aksjomatu podobnego do aksjomatu zupełności Hilberta w jego systemie geometrii, który pozwalał na ustalenie kategoryczności tego systemu (właściwie dopiero aksjomat ciągłości, który zastąpił aksjomat zupełności, pozwala na precyzyjne i poprawne ustalenie kategoryczności systemu geometrii). Wyrażano więc potrzebę uzupełnienia teorii mnogości o *aksjomat ekstremalny* (w terminologii Carnapa i Bachmanna, 1936), który przesądziłby jednoznaczność uniwersum zbiorów. Najbardziej znana tego typu propozycja to *aksjomat ograniczenia* Abrahama Fraenkla, głoszący, iż ist– nieją tylko te zbiory, których istnienie możemy dowieść z aksjomatów teorii mnogości, w oryginalnym sformułowaniu (Fraenkel 1928:355):

> **Axiom der Beschränkheit**. *Ausser den durch die Axiome II bis VII (bzw. VIII) gefordeten Mengen existieren keine weitere Mengen.*

Aksjomat ten miał zapewniać, że uniwersum zbiorów zawiera jedynie te zbiory, których istnienie jest *konieczne* (z punktu widzenia aksjomatów teorii mnogości). Został on poddany krytyce, zarówno ówcześnie (John von Neumann, Ernst Zermelo), jak i później (zob. np. Fraenkel, Bar Hillel, Levy 1973). Podobny aksjomat *minimalności* sformułował w 1951 roku Roman Suszko, nazywając go *aksjomatem kanoniczności* (Suszko 1951).

Współczesna teoria mnogości skłania się raczej ku rozważaniu aksjomatów *maksymalności*, jeśli chodzi o istnienie zbiorów. Już sam Kurt Gödel, który rozważał w 1939 roku inny aksjomat minimalności (słynny aksjomat *konstru-*

owalności), wykorzystywał go wtedy jedynie dla pokazania niesprzeczności aksjomatu wyboru oraz uogólnionej hipotezy kontinuum z pozostałymi aksjomatami teorii mnogości. Później natomiast pisał (Gödel 1964, cytat za tłumaczeniem w Murawski 2002:115):

> Z drugiej strony z aksjomatu w pewnym sensie przeciwnego do tego [tj. aksjomatu konstruowalności – JP] daje się być może wyprowadzić negację hipotezy Cantora. Mam tu na myśli aksjomat, który (podobnie jak [wprowadzony przez] Hilberta aksjomat zupełności w geometrii) stwierdzałby pewną własność maksymalności systemu wszystkich zbiorów, podczas gdy aksjomat *A* [konstruowalności – JP] orzeka własność minimalności. Zauważmy, że tylko własność maksymalności wydaje się harmonizować z pojęciem zbioru wyjaśnionym w przypisie 19.

Po raz pierwszy pogląd powyższy Gödel wyraził w 1947 roku. Jak wiadomo, w 1963 roku Paul Cohen wykazał, że jeśli teoria mnogości ZF jest niesprzeczna, to niesprzeczna jest też teoria ZF wraz z negacją uogólnionej hipotezy kontinuum. Tak więc, nadzieję na rozstrzygnięcie uogólnionej hipotezy kontinuum na gruncie znanej teorii mnogości zostały rozwiane.

Czy jednak można te nadzieje przywrócić, stosownie rozszerzając aksjomatykę teorii mnogości? To problem żywo dyskutowany w podstawach oraz filozofii matematyki. Nie możemy sobie oczywiście tutaj pozwolić na jakiekolwiek sprawozdanie z tych dyskusji. Wspomnijmy jedynie, że współcześnie rozważa się celowość rozszerzenia teorii mnogości o pewne aksjomaty *maksymalności*, nazywane aksjomatami *istnienia dużych liczb kardynalnych*. Nie miejsce tu także na epatowanie publiczności ezoteryczną terminologią oraz wyrafinowanymi konstrukcjami. Pozwólmy sobie jedynie na jeden przykład: wspomnimy (bez przytaczania formalnych definicji) o tak zwanych liczbach *nieosiągalnych*. Jeśli teoria mnogości jest niesprzeczna, to nie można w niej udowodnić istnienia liczb nieosiągalnych. Założenie ich istnienia jest więc silnym dodatkiem do teorii mnogości.

Zbiór jest *nieskończony*, gdy jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym. *Twierdzenie Cantora* głosi, że żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów. Na mocy aksjomatu nieskończoności (który głosi, że istnieje co najmniej jeden zbiór nieskończony) wynika z tego, że istnieją zbiory nieskończone o różnej liczbie elementów, a więc że istnieją różne (ilościowo) nieskończoności.

Można precyzyjnie zdefiniować pojęcie *mocy* zbioru (czyli liczby jego elementów). Moce zbiorów tworzą skalę *pozaskończoną* (skalę *alefów*). To, że skala ta pokrywa się ze skalą mocy zbiorów otrzymywanych przez operacje tworzenia zbioru potęgowego i sumy zbiorów z najmniejszego zbioru nieskończonego (zbioru wszystkich liczb naturalnych) jest treścią uogólnionej hipotezy kontinuum.

Liczby *nieosiągalne* to moce takich zbiorów, które nie mogą zostać otrzymane przez operacje tworzenia zbioru potęgowego lub sumowania odpowiednio mniejszych rodzin zbiorów, mówiąc nieprecyzyjnie, choć może przynajmniej obrazowo. Tak więc, jeśli x jest liczbą nieosiągalną, to nie można jej „osiągnąć" poprzez korzystanie ze znanych operacji tworzenia zbiorów. Wielokropek będący drogowskazem do tej liczby jest, swobodnie fantazjując, naprawdę gigantyczny. Liczby nieosiągalne są jednak mikrusami na skali rozważanych współcześnie dużych liczb kardynalnych. Wspomnimy tylko, że np. jeśli x jest tzw. liczbą *mierzalną* to jest nieosiągalna i jest tyle liczb nieosiągalnych mniejszych od niej, ile wynosi sama moc x. Czy nasza wyobraźnia gotowa jest posługiwać się takimi wielokropkami?

Nieskończoność zawsze sprawiała kłopoty: pokoleniom filozofów, a także każdemu, kto się nad pojęciem nieskończoności choć przez chwilę zastanawiał. Z drugiej strony, to właśnie dzięki badaniom nieskończoności matematyka ukazuje swoją moc i piękno. *Matematyka jest logiką Nieskończonego* – pisał twórca aksjomatycznej teorii mnogości, Ernst Zermelo.

Wspomnijmy jeszcze o eliminowaniu użyć wielokropka w opisie nieskończonych tworów syntaktycznych przez specjalnie dobrane symbole: ma to miejsce w tzw. językach z nieskończenie długimi formułami, gdzie zamiast np. pisać $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \ldots$ piszemy, powiedzmy: $\bigcap_n \alpha_n$. To oczywiście zabieg czysto techniczny, kształt symbolu nie ma znaczenia. Na marginesie nasuwa się pytanie: dlaczego właściwie wybrano w notacji matematycznej znak wielokropka do pełnienia jego funkcji?

3.3. SUBTELNOŚCI REKURSJI

W pewnych przypadkach używanie wielokropka jest nieodzowne, ale obwarowane zastrzeżeniami. Porównajmy np. taki oto fragment ze znanego podręcznika funkcji rekurencyjnych i metamatematyki (Murawski 1990:22.):

> Zauważmy, że w dowodzie wniosku 2.14(iii) używaliśmy … w znaczeniu „itd.". Był to więc skrót zastępujący wypisywanie po kolei wszystkich składników alternatywy mających kształt $a = k_i$ (w tym przypadku zresztą konieczny, gdyż nie znaliśmy wartości n). W ogólności jednak przy definiowaniu funkcji i relacji rekurencyjnych nie wolno używać …, w szczególności nie wolno tego czynić, gdy „kropki te zależą" od wartości argumentu. Prowadzić to bowiem może do funkcji nierekurencyjnych.

Podobnie w podręczniku logiki matematycznej (Batóg 1999:224):

> 18. $\exists x(u_1 < x \wedge u_2 < x \wedge \ldots \wedge u_k < x)$
>
> Wyrażenie 18 nie jest tutaj konkretnym twierdzeniem, ale schematem nieskończenie wielu twierdzeń dających się uzyskać przez ustalenie wskaźnika k i – dzięki temu – wyeliminowanie wielokropka.

Tak więc, wielokropek występuje w odnośnych sformułowaniach jedynie *metajęzykowo*. Nie należy on do alfabetu symboli rozważanego języka. Pozwala na formułowanie twierdzeń, ale musi zostać w każdym konkretnym przypadku wyeliminowany.

3.4. LOGIKA WYRAŻEŃ ELIPTYCZNYCH

Przywołamy w tym miejscu pewne ustalenia uzyskane we współczesnej informatyce teoretycznej (w logicznych podstawach informatyki) dotyczące wyrażeń eliptycznych. Właśnie wielokropek wybrany został w tekstach matematycznych z tej dyscypliny jako reprezentujący eliptyczność wyrażeń.

W artykule *Triple dots in a formal language* Leon Łukaszewicz konstruuje język formalny TDL w którym rozważane są termy zawierające wielokropek (Łukaszewicz 1999). Pozwala to, m.in. zastępować definicje rekurencyjne (indukcyjne) przez (krótsze) konstrukcje iteracyjne, do których, jak twierdzi autor, wiele osób jest bardziej przyzwyczajonych.

Termy wielokropkowe, bądź formuły zawierające takie termy mogą być reprezentowane w notacji eliminującej wielokropki, a wprowadzającej symbole nowych operacji i liczniki. Dla przykładu, formuła:

$$\forall x^{*}\exists d(((x_1 \cdot x_{|c|}) +^{*} | c |,1..n) \leq (a_{|c|+k} \cdot^{*} | c |,b..d))$$

reprezentuje eliptyczną formułę:

$$\forall x^{*}\exists d(x_1 \cdot x_1 + ... + x_1 \cdot x_n \leq a_{b+k} \cdot ... \cdot a_{d+k})$$

a term

$$(\{((| c | 1 \cdot x_{|c|}) +^{*} | c |,0..n)\} \cup^{*} | c | 1,2..m)$$

(zawierający dwa liczniki) reprezentuje, dla $m = 3$ oraz $n = 2$, term:

$$\{(2 \cdot x_0 + 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2), (3 \cdot x_0 + 3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2)\}.$$

Poprzez wprowadzenie stosownych konwencji notacyjnych (skrótów) uzyskać nożna np. proste wyrażenia odpowiadające m.in. granicom sum częściowych (a więc np. wyrazić e^x za pomocą termu języka TDL).

Reguły składniowe języka TDL umożliwiają tworzenie różnego rodzaju termów złożonych (przykładowo, używa się operacji arytmetycznych oraz operacji na zbiorach [liczb] oraz listach). Warto może zauważyć, że kwantyfikatory w TDL wiążą nieskończone ciągi zmiennych.

Uniwersum semantyczne dla TDL budowane jest z liczb rzeczywistych (rozumianych jako atomy, tj. nie-zbiory) poprzez iterowanie (przeliczalną liczbę razy) operacji tworzenia zbioru potęgowego. Elementy tego uniwersum nazywane są obiektami abstrakcyjnymi. Interpretacjami języka TDL są funkcje przyporządkowujące symbolom TDL stosowne obiekty abstrakcyjne.

Przy użyciu prostych, ale i subtelnych sztuczek technicznych określa się wartości termów języka TDL w uniwersum semantycznym. Wreszcie, podaje się także tarskiańsko wzorowaną definicję prawdziwości formuły w interpretacji.

Pokazuje się, że termy wielokropkowe mogą zostać jednoznacznie sprowadzone do pewnych kanonicznych postaci i podaje się twierdzenie ustalające od jakiego rodzaju zmiennych zależy prawdziwość formuł języka TDL w interpretacjach.

W artykule Alana Bundy'ego i Juliana Richardsona *Proofs About Lists Using Ellipsis* (Bundy, Richardson 1999) również znajdujemy zwięzłe przedstawienie tej samej problematyki, w nieco innym ujęciu. Porównajmy dwie definicje funkcji *foldl*:

(1) *Definicja rekurencyjna.*

– $foldl(\otimes, A, []) = A$

– $foldl(\otimes, A, [H \mid T]) = foldl(\otimes, A \otimes H, T)$.

(2) *Definicja eliptyczna.*

$$foldl(\otimes, A, [E_1, E_2, ..., E_n]) = (...((A \otimes E_1) \otimes E_2) \otimes ... \otimes E_n).$$

Definicja (1) spełnia standardy poprawności definiowania. Czynniki natury psychologicznej (percepcyjnej?) sprawiają, zdaniem autorów, że druga z tych definicji jest łatwiejsza do uchwycenia, zrozumienia. Autorzy stwierdzają nawet, że z (2) możemy wiązać *rzeczywiste* znaczenie definiowanego pojęcia, a (1) to po prostu najlepszy sposób reprezentacji tego znaczenia w standardowych formalizmach. Logikę, w której poprawne składniowo byłyby definicje typu (2) autorzy nazywają *logiką schematyczną*; tego typu logika używana była np. w rozprawie Baker 1993.

W logice schematycznej łatwo dowodzi się np. następującego twierdzenia o funkcji zdefiniowanej schematem (2):

$$foldl(\otimes, A, [E_1, ..., E_{n-1}, E_n]) = foldl(\otimes, A, [E_1, ..., E_{n-1}]) \otimes E_n.$$

Reprezentację konstrukcji eliptycznych uzyskują autorzy za pomocą funkcji $\Diamond$:

$$\Diamond : (nat \to (nat \to \tau)) \to list(\tau),$$

która liczbie naturalnej oraz funkcji o wartościach określonego typu przyporządkowuje listę złożoną z wartości tej funkcji: $\Diamond(n, f) = [f(1),..., f(n)]$. Funkcja $\Diamond$ może być zdefiniowana rekurencyjnie:

– $\Diamond(0, F) = nil$

– $\Diamond(s(N), F) = \Diamond(N, F) <> (F(s(N)) :: nil)$,

(gdzie :: oraz <> mają zwykłe znaczenia dotyczące operacji na listach); inną jeszcze jej definicją rekurencyjną jest np.:

– $\Diamond(0, F) = nil$

– $\Diamond(s(N), F) = F(1) :: \Diamond(N, \lambda i.F(s(i)))$.

Wiele definicji rekurencyjnych dotyczących operacji na listach może być wyrażonych w terminach funkcji $\Diamond$, przy założeniu następującego aksjomatu:

$$\forall L : list(\tau), \exists n : nat, \exists f : (nat \to \tau).L = \Diamond(n, f).$$

Autorzy pokazują, jak niektóre twierdzenia wykorzystujące indukcję dowodzone mogą być w sposób bardziej bezpośredni, przy użyciu proponowanej notacji schematycznej. Informują również o implementacjach omawianej metody w języku λ*Clam* stosowanym w automatycznym dowodzeniu twierdzeń.

4. ZAKOŃCZENIE

Na zakończenie koślawa może nieco, ale wielce życzliwa metafora interpunkcyjno-egzystencjalna. Życzymy naszemu Jubilatowi mocy twórczych (w matematycznym sensie) *nieosiągalnych*, umykających przybliżeniu przez jakikolwiek wielokropek, oraz satysfakcji z ich wykorzystania.

ODNOŚNIKI BIBLIOGRAFICZNE

Angełowa, I. 1982. Charakterystyka wielokropka na tle pozostałych znaków interpunkcyjnych polszczyzny. *Język Polski*, nr 2–3, 158–166.

Angełowa, I. 1985. *Charakterystyka interpunkcji polskiej w świetle normy i praktyki*. Wrocław: Zakład Narodowy im. Ossolińskich.

Baker, S. 1993. *Aspects of the Constructive Omega Rule within Automated Deduction*. PhD thesis, Edinburgh.

Batóg, T. 1999. *Podstawy logiki*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Batóg, T., Steffen-Batogowa, M. 1977. Wstępny algorytm konwersji polskich tekstów fonematycznych w ortograficzne. *Lingua Posnaniensis* 20, 65–95.

Bundy, A. 2004. Planning and Patching Proof. *Informatics Research Report EDI-INF-RR-0229*. School of Informatics, University of Edinburgh.

Bundy, A., Richardson, J. 1999. Proofs About Lists Using Ellipsis. W: H. Ganzinger, D. McAllester, A. Voronkov (eds.). *Proceedings of the 6th International Conference on Logic for Programming and Automated Reasoning, LPAR*, number 1705 in *Lecture Notes in Artificial Intelligence*. London: Springer Verlag, 1–12.

Cajori, F. 1993. *A History of Mathematical Notations*. New York: Dover Publications, Inc.

Carnap, R. Bachmann, F. 1936. Über Extremalaxiome. *Erkenntnis* 6, 166–188.

Conway, J.H., Guy, R.K. 1999. *Księga liczb*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.

Eco, U. 1993. Jak stawiać wielokropek. W: *Zapiski na pudełku od zapałek*. Poznań: „Historia i Sztuka".

Euler, L. 1796. *Introduction a l'Analyse Infinitésimale*, I. Paris: Barrois.

Fraenkel, A.A. 1928. *Einleitung in die Mengenlehre*. Berlin: Verlag von Julius Springer.

Fraenkel, A.A., Bar-Hillel, Y., Levy, A. 1973. *Foundations of set theory*. Amsterdam – London: North-Holland Publishing Company.

Franzén, T. 2004. Transfinite progressions: a second look at completeness. *The Bulletin of Symbolic Logic* Volume 10, Number 3, 367–389.

Gödel, K. 1964. What is Cantor's continuum problem? W: P. Benaceraff, H. Putnam (red.). *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 258–273. Korzystamy z tłumaczenia zawartego w: Murawski, R. (red.). 2002. *Współczesna filozofia matematyki.* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN, 103–136.

Jodłowski, S. 1979. *Losy polskiej ortografii*. Warszawa: PWN.

Łoś, J. 1917. *Pisownia polska w przeszłości i obecnie – zagadnienia i wnioski*. Kraków.

Łuczyński, E. 1999. *Współczesna interpunkcja polska*. Gdańsk: Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego.

Łukaszewicz, L. 1999. Triple dots in a formal language. *Journal of Automated Reasoning* 22 (3), 223–239.

Mostowski, A. 1967. O niektórych nowych wynikach meta-matematycznych dotyczących teorii mnogości. *Studia Logica* XX, 99–116.

Murawski, R. 1990. Funkcje rekurencyjne i elementy metamatematyki. Problemy zupełności, rozstrzygalności, twierdzenia Gödla. Poznań: Wydawnictwo Naukowe UAM.

Podracki, J. 1998. *Słownik interpunkcyjny języka polskiego*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

Saloni, Z. 2005. O kodyfikacji polskiej ortografii — historia i współczesność. „*Nauka*", *Kwartalnik PAN* nr 4, 71–96.

Steffen-Batóg, M., Nowakowski, P. 1992. An algorithm for phonetic transcription of orthographic texts in Polish. *Studia Phonetica Posnaniensia* 3, 135–184.

Suszko, R. 1951. Canonic axiomatic systems. *Studia Philosophica* IV, 301–330.

Tarajło, Z. 1988. *Znaki niefonogramiczne we współczesnym piśmie polskim*. Wrocław: Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej.

DODATEK: POKOLENIE WIELOKROPKA, CZYLI WIELOKROPEK W POLSKIEJ RZECZPOSPOLITEJ LUDOWEJ

Podajemy niżej dwa przykłady twórczego wkładu cenzury prewencyjnej w Polskiej Rzeczpospolitej Ludowej w kulturę narodową oraz w rozwój wyobraźni zwykłego wolnego szarego obywatela.

1. TYGODNIK POWSZECHNY

Komunikat

W dniu 10 lutego 1989 r. odbyło się spotkanie arcybiskupa metropolity krakowskiego kardynała Franciszka Macharskiego z […] [Ustawa z dn. 31 VII 1981, O kontroli prasy i widowisk, art. 2 pkt. 6 (Dz. U. nr 44, poz. 204)] Lechem Wałęsą. […] [Ustawa z dn. 31 VII 1981, O kontroli prasy i widowisk, art. 2 pkt. 6 (Dz. U. nr 44, poz. 204)]

Omawiana była aktualna sytuacja w kraju ze szczególnym uwzględnieniem problemów ludzi pracy.

Kanclerz
Kurii Metropolitalnej
ks. dr Bronisław Fidelus

[…] [Ustawa z dn. 31 VII 1981,
O kontroli prasy i widowisk,
art. 2 pkt. 6 (Dz. U. nr 44, poz. 204)]
dr Jan Dziadoń

Kraków, 10 lutego 1989 r.

2. PIWNICA POD BARANAMI

Marek Pacuła: **Życiorys**
Opowiadanie autobiograficzne o zwykłym wolnym szarym obywatelu.

Był zwykłym szarym obywatelem niewielkiego kraju o ustroju określonym położeniem geograficznym państw sąsiednich.

I mimo, że był jedynakiem miał brata […] [Ustawa z dnia 31 sierpnia 1981 roku o kontroli publikacji i widowisk, artykuł 2, punkt 3]. Dobrze, że radio to nagrywa.

Mieszkał w mieszkaniu wybudowanym już w tym ustroju, którego standard określały przepisy […] [Ustawa z dnia 31 sierpnia 1981 roku o kontroli publikacji i widowisk, artykuł 2, punkt 3].

Pracował w dużym przedsiębiorstwie, którego produkcja nie była mu znana w całości, ponieważ pracował na pierwszą zmianę i do południa robili tylko gąsienice, ale po południu […] [Ustawa z dnia 31 sierpnia 1981 roku o kontroli publikacji i widowisk, artykuł 2, punkt 3].

Spał regularnie, siedem godzin na dobę i czasem nawet śniło mu się inne życie […] [Ustawa z dnia 31 sierpnia 1981 roku o kontroli publikacji i widowisk, artykuł 2, punkt 3].

Miał swoje nawet dość odważne poglądy i kiedyś dla ich publicznego zamanifestowania przechodząc koło bardzo znanego pomnika wśród róż […] [Ustawa z dnia 31 sierpnia 1981 roku o kontroli publikacji i widowisk, artykuł 2, punkt 3].

Kiedy dwa lata temu przyszło mu napisać życiorys zaczął go od słów: *Urodziłem się* […] [Ustawa z dnia 31 sierpnia 1981 roku o kontroli publikacji i widowisk, artykuł 2, punkt 3].

A kiedy umarł na klepsydrze nie było już nawet jego nazwiska, tylko […] [Ustawa z dnia 31 sierpnia 1981 roku o kontroli publikacji i widowisk, artykuł 2, punkt 3].

Cześć jego pamięci!