KULTURA – SPOŁECZEŃSTWO – EDUKACJA NR 2(24) 2023 POZNAŃ

Agnieszka Bojarska-Sokołowska*
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

Elementy kultury matematycznej w centrach nauki

KEYWORDS

mathematical education, mathematical culture, interactive learning, exhibits/exhibitions, science centres

ABSTRACT

Agnieszka Bojarska-Sokołowska, *Elementy kultury matematycznej w centrach nauki* [*Elements of mathematical culture in science centers*]. Kultura – Społeczeństwo – Edukacja nr 2(24) 2023, Poznań 2023, pp. 69–83, Adam Mickiewicz University Press. ISSN (Online) 2719-2717, ISSN (Print) 2300-0422. https://doi.org/10.14746/kse.2023.24.2.4

The main purpose of writing this article was to present the elements of mathematical culture that are currently available to visitors of science centers in the form of interactive exhibitions. The following text describes mathematical knowledge, mathematical activities and the application of mathematics in other fields of knowledge and life. Mathematical exhibits are elements of didactic culture. It can be assumed that they are carriers of specific meanings created by visitors to science centers and visitors to the exhibitions. The analyzes undertaken in the text made it possible to identify certain categories of the studied elements of mathematical culture. The study was carried out in two science centers in Poland, using a qualitative strategy, analyzing documents. The author conducted similar research before the pandemic in museums and science centers in Germany. This article presents the results for three elements of culture. In the future, the study will also cover mathematical exhibits/exhibitions from other science centers in European countries that began to function again in a renewed form after the pandemic.

* ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3864-2263.

Wstęp

Obecnie, po okresie pandemii, ponownie otwierają się lub powstają w Polsce kolejne centra nauki jako alternatywne środowiska uczenia się dla dzieci, młodzieży i dorosłych. Miejsca te stanowią cenną pod kątem merytorycznym bazę do zaciekawienia, rozwijania i poszerzania wiedzy, umiejętności, jak również samodzielnego poznawania tajników nauki przez społeczeństwo. Ponadto w przeciwieństwie do bazy cyfrowej, Internetu, dają możliwość doświadczania wszystkimi zmysłami, dotykania, manipulowania, co okazuje się bardzo istotnym aspektem, w szczególności dla młodych osób. Według Hugo Kükelhausa dorastający człowiek potrzebuje możliwości doświadczania wszystkimi zmysłami, aby móc rozwinąć się w pełni. To znaczy, że jeśli otoczenie nie będzie dostarczało dziecku wielu bodźców, jeśli nie będzie ono zachęcane do przeżywania wrażeń dotykowych, zapachowych, smakowych i słuchowych, jego potencjał się zmarnuje (Luescher, b.d.). Na potrzebę manipulowania obiektami podczas uczenia się zwracają uwagę również badaczki – Charmaine Liebertz oraz Jo Boaler. Pierwsza z nich pisze: „dzieci same powinny móc odkrywać sensy, znaczenia przedmiotów, określać, nazywać uczucia, sortować, eksperymentować, oglądać, dotykać, przedstawiać, stawiać pytania i znajdować na nie odpowiedzi w zorganizowanej przestrzeni wyraźnych i zaaranżowanych obiektów" (Liebertz, 1988, s. 253). Druga z badaczek, Jo Boaler, zwraca uwagę na konieczność manipulowania i obserwowania dokonywanych zmian przez eksperymentujące osoby dla rozwijania wiedzy matematycznej (Boaler, 2016, s. 168 i n.).

Środowisko uczenia się proponowane w centrach daje możliwość popełniania błędów bez żadnych konsekwencji, możliwość zajmowania się danym zagadnieniem bez ograniczeń czasowych, jak również możliwość wyboru, czy chcę samodzielnie rozwiązywać problem, czy w towarzystwie z innymi, wybranymi przez siebie osobami. Zwiedzający mogą doświadczać błędów, ponieważ takowe mogą być korzystne poznawczo. Jest to przywoływany przez badaczy pogląd, który dowodzi konieczności pojawiania się błędnych pomysłów i prób uczniowskich w celu rozpoznawania wiedzy poprawnej (Heinze, 2005).

Poruszane tematy, sposoby i metody przedstawiania zagadnień prezentowanych w centrach nauki mogą służyć jako inspiracja dla nauczycieli do prowadzenia zajęć również pozalekcyjnych, bardziej motywujących dzieci i młodzież do poszukiwania własnych rozwiązań, próbowania czy nawet tworzenia. W artykule opisano wybrane elementy kultury matematycznej, które pojawiają się we współczesnych centrach nauki w Polsce.

Kultura matematyczna

Leon Dyczewski charakteryzuje kulturę jako system powiązanych elementów, które tworzą kody znaczeniowe i służą międzyludzkiej komunikacji. System znaków stworzonych przez ludzi cechuje się tym, że jest w pełni zrozumiały tylko dla jej członków, a sieć znaczeń jest tworzona przez pokolenia, które w danej grupie społecznej wzrastają i ją tworzą (za: Włodarczyk, 2003, s. 960). Gdy weźmiemy pod uwagę powyższe stwierdzenie, możemy mówić o kulturze matematyków lub kulturze matematyki. Co więcej, nie ma kultury, chociażby najbardziej prymitywnej, w której nie byłoby jakiejś matematyki (Davis i in., 2001, s. 19). Według Raymonda Wildera matematyka jest systemem kulturowym, tj. strukturą ogólnej kultury społeczeństwa. Dzięki takiemu podejściu do matematyki możemy m.in. wykrywać mechanizmy społeczne rozwoju tej dyscypliny wiedzy; możliwe jest np. „pojawienie się jednocześnie, ale niezależnie nowych pojęć i teorii (geometria nieeuklidesowa), […] odkrywanie pewnych metod w odpowiedzi na «zapotrzebowanie» społeczne, skuteczności matematyki w przyrodoznawstwie i technice" (za: Tocki, 2006, s. 143). Roman Duda dodaje, że „matematyka odgrywała w kulturze greckiej, wśród elity intelektualnej, wielką rolę. Struktura nadawana wówczas matematyce narzucała innym dyscyplinom sposób ich uprawiania. Śledząc rozwój myśli matematycznej, oglądamy rozwój techniki, cywilizacji" (Duda, 1990, s. 2). Na gruncie polskim najszerzej kulturą matematyczną zajmuje się Małgorzata Makiewicz, która bada jej przejawy m.in. w fotografii. Twórczyni międzynarodowego konkursu „Matematyka w obiektywie" zwraca uwagę na jej procesualny i ciągły charakter: „kultura matematyczna nie tworzy się w sposób algorytmiczny na 21., 32., czy 47. lekcji matematyki. Proces jej kształtowania związany jest z codziennym obcowaniem człowieka w świecie matematycznym" (Makiewicz, 2011, s. 21). Marek Kordos definiuje kulturę matematyczną jako „umiejętność pozwalającą się nie zgubić w technicznej stronie pojęć matematyki, w charakterystycznej dla matematyków obfitości formalizmów, w dostrzeganiu za abstrakcyjnymi rozumowaniami bardzo realnych […] konkretów, w osobistym wreszcie stosunku do uzyskanych rezultatów […], umiejętności dostrzegania struktury, a nie detali" (Kordos, 1995, s. 8). Stanisław Domoradzki wyróżnia dwa wymiary kultury matematycznej: jednostkowy i społeczny. Wymiar pierwszy oznacza uznanie dla matematyki jako pewnej działalności intelektualnej, do której zalicza techniki rachunkowe, rozumienie idei dowodzenia, konieczność wyraźnego definiowania pojęć, a nawet postrzegania piękna matematyki. Wymiar drugi przedstawia jako kulturę społeczeństwa, na którą składają się kultury jednostek. Wyrazem tego podejścia jest powszechne stosowanie technik intelektualnych, takich jak: abstrahowanie, dostrzeganie analogii, porządkowanie, klasyfikowanie, definiowanie, argumentowanie, algorytmizowanie, optymalizowanie (Domoradzki, b.d.). Małgorzata Makiewicz do elementów kultury matematycznej dodaje twórczość i wyobraźnię geometryczną oraz postrzeganie piękna matematyki. Uważa również, że kultura matematyczna polega na tym, że zauważa się pewne idee matematyczne, problemy, a nawet twierdzenia w otaczającym nas świecie, w przyrodzie martwej, ożywionej, w dziełach rąk ludzkich (Makiewicz, 2010, s. 9). Podobnie myśli Marek Kordos, który traktuje kulturę matematyczną jako „umiejętność zobaczenia w rozważanym problemie nieistniejących obiektów matematycznych, które jednak zdumiewająco skutecznie pozwalają się z tym problemem uporać" (Kordos, 2009, s. 5). Podsumowując dotychczasowe rozważania, można stwierdzić, że kształcenie kultury matematycznej osób odbywa się w wyniku ich kontaktu z matematyką, który ma miejsce niekoniecznie podczas zajęć w szkole. Wystawy interaktywne, eksponaty/ekspozycje występujące m.in. w centrach nauki dają możliwość skupienia się na składnikach kultury matematycznej, tj. wyobraźni, twórczości, elegancji matematyki oraz na jej języku. Ryszard Pawlak zwraca uwagę na walory estetyczne, które mogą towarzyszyć prezentacji eksponatów/ekspozycji. Zauważa on, że możliwość zobrazowania pojęcia matematycznego za pomocą rysunku, wizualizacji elektronicznej lub przyrządu dałoby widzowi silne przeżycie estetyczne, choć bez zrozumienia definicji i czegokolwiek innego (Pawlak, 1993, s. 58). Ten aspekt wystaw interaktywnych Jolanta Kruk nazywa funkcją ludyczną. Polega ona na „sięganiu do mechanizmów emocjonalnych poznania" (Karwasz i Kruk, 2012, s. 27). Eksponaty i ich narracje powinny zadziwiać niespodziewanymi skojarzeniami, podobać się estetycznie, zaskakiwać nowością, rozśmieszać, a nawet przestraszyć. Ekspozycje w centrach nauki powinny również spełniać funkcję dydaktyczną i quasi-naukową. W pierwszym przypadku mogą uzupełniać lub zastępować szkołę, tzn. uczeń może dostawać wstępną wiedzę od nauczyciela, a eksponat w centrum może ilustrować poznaną wiedzę, wyjaśnić poznane zjawisko lub pokazać praktyczne zastosowania. Może zachodzić również proces odwrotny, tj. uczeń zapoznaje się w centrum nauki z danym pojęciem, a następnie nauczyciel wykorzystuje tą wiedzę w szkole. Funkcja quasi-naukowa ekspozycji jest rozwinięciem funkcji dydaktycznej, pogłębieniem poznanej wiedzy zwiedzającego centrum (Karwasz i Kruk, 2012, s. 27).

Podstawy metodologiczne badań własnych

Celem przeprowadzonych badań było rozpoznanie elementów kultury matematycznej w centrach nauki w Polsce. Przedmiotem badań były eksponaty/ekspozycje dotyczące matematyki, które znajdowały się w dwóch centrach nauki. Na gruncie jakościowego rozpoznania zaplanowano badania metodą analizy dokumentów. Krzysztof Rubacha (2008, s. 157) traktuje ją jako metodę zbierania danych i nazywa „przeszukiwaniem źródeł wtórnych". W metodzie tej uważnie traktuje się rolę, jaką mogą odgrywać dokumenty w tworzeniu i kierowaniu ludzkimi działaniami (Rapley, 2013, s. 173). W badaniach jakościowych „interakcje i dokumenty postrzega się tu jako sposoby konstruowania procesów społecznych, w ramach których ludzie współpracują lub konkurują ze sobą" (Flick, 2012, s. 13). Tim Rapley (2013, s. 158) podkreśla, że dokumenty są analizowane zawsze w jakimś kontekście. W relacjonowanym tu badaniu został on wyznaczony przede wszystkim przez następujące pytania problemowe: Jakie elementy kultury matematycznej można odnaleźć w centrach nauki? Jakie funkcje poznawcze mogą spełniać badane eksponaty? Przejawów kultury matematycznej szukano w treściach i formie ekspozycji, w samych eksponatach, w narracji dotyczącej eksponatów, w formułowanych problemach i ilustracjach do nich. Gdy przeanalizuje się eksponaty/ekspozycje występujące w centrach nauki, można wyróżnić następujące elementy kultury matematycznej: wiadomości matematyczne, język matematyczny, aktywności matematyczne, zastosowanie matematyki w innych dziedzinach wiedzy i życia oraz możliwość przeżycia estetycznego. W niniejszym artykule opisano, w jaki sposób eksponaty w centrach służą pogłębianiu wiedzy z zakresu matematyki, umożliwiają aktywności matematyczne oraz pokazują zastosowanie matematyki w innych dziedzinach wiedzy i życia.

Organizacja i przebieg badań

Do badań wybrano dwie placówki: Centrum Nauki Kopernik w Warszawie i ExploraPark – Park Nauki i Techniki w Wałbrzychu (por. Bojarska-Sokołowska, 2019, s. 225–290). Przy wyborze kierowano się dwiema zasadami: po pierwsze występowaniem w centrach eksponatów, ekspozycji matematycznych oraz możliwością robienia zdjęć, dokumentowania ekspozycji i eksponatów. Zebraną dokumentację skatalogowano i poddano dalszej analizie oraz interpretacji badawczej. W tabeli 1 przedstawiono krótką charakterystykę centrów.

Tabela 1

Opis centrów nauki

	Centrum Nauki Kopernik w Warszawie	ExploraPark – Park Nauki i Techniki w Wałbrzychu
Cel działalności	Misją Centrum jest inspirowanie do doświadczania dla siebie natury, stosowania i rozwijania nauki. Niektóre z celów strategicznych Centrum to: zapewnienie wysokiej jakości doświadczeń dla określonej wymogami bezpieczeństwa liczby zwiedzających oraz dla zwiedzających wirtualnie, wspieranie rozwoju kompetencji przyszłości, mobilizowanie ludzi wokół ważnych tematów związanych z nauką itp.	ExploraPark to miejsce, którego głównym celem jest tworzenie dzieciom i młodzieży warunków do nauki przez zabawę i niekonwencjonalnego poznawania świata. Dla rodziców i nauczycieli to miejsce wspierania zainteresowań, a także postępów w nauce i rozwoju ich dzieci/uczniów. Park służy komunikacji pomiędzy dziećmi oraz dziećmi i dorosłymi, a także eksperymentowaniu, zadawaniu pytań i wspólnemu poszukiwaniu rozwiązań
Data założenia i założyciele	W lutym 2004 powołano zespół do spraw realizacji projektu centrum nauki. Styczeń 2007 roku – dyrektorem Centrum zostaje Robert Firmhofer. Listopad 2010 – otwarcie Centrum. 11 marca – 10 czerwca 2020 – Centrum zamknięte z powodu pandemii	Działalność centrum zapoczątkowała w latach 2008–2009 wystawa na zamku Książ. Organizatorem przedsięwzięcia był Instytut Badań Kompetencji w Wałbrzychu. Prezesem parku jest Janusz Mulawa
Formy i metody działalności	Zwiedzanie Centrum możliwe jest indywidualnie lub w grupie. Można zwiedzać wystawy stałe i tematyczne, np. dotyczące muzyki (lipiec 2023), planetarium, Teatr Robotyczny i Teatr Wysokich Napięć, uczestniczyć w warsztatach i laboratoriach Pracowni Przewrotu Kopernikańskiego. Prowadzona jest działalność badawczo-rozwojowa z udziałem środowiska naukowego. Organizowane są pikniki i festiwale nauki, konferencje Pokazać – Przekazać oraz forum KMO itp.	Centrum można zwiedzać indywidualnie lub w grupie. Zwiedzającym pomagają animatorzy i opiekunowi wystaw. Wizyty zorganizowane w formie lekcji mogą być połączone z wyborem jednej ze ścieżek tematycznych: mozaiki i parkietaże, matematyka w przyrodzie, matematyka a sztuka, fraktale, twierdzenie Pitagorasa, miary czasu. W centrum można również celebrować urodziny
Zwiedzający	Centrum odwiedza ok. miliona osób rocznie. Jest otwarte dla wszystkich niezależnie od wieku; przystosowane do przyjmowania rodzin i innych grup, np. klas szkolnych	Centrum odwiedza rocznie ok. 15 tys. osób. Jest otwarte dla dzieci, młodzieży, rodziców oraz klas szkolnych
Specyfika	Centrum zajmuje ok. 15 tys. m^2, na których znajduje się m.in. strefa eksperymentowania z ponad 200 eksponatami i z 19 ścieżkami tematycznymi	Centrum zajmuje powierzchnię ok. 500 m^2, na których znajduje się ponad 150 interaktywnych zabawek, gier logicznych, modeli i programów multimedialnych
Języki opisu eksponatów	polski, angielski, ukraiński	polski, angielski, niemiecki, czeski

Źródło: opracowano w sierpniu 2023 roku na podstawie informacji podanych na stronach https://www.kopernik.org.pl i https://explorapark.pl

Wnioski z badań

Wiadomości matematyczne

Pierwszym z analizowanych elementów kultury matematycznej była wiedza matematyczna. Można do niej zaliczyć pojęcia matematyczne, obiekty matematyczne, jak również postacie matematyków. Najwięcej eksponatów występujących w centrach obrazowało różne typy złudzeń optycznych (por. Jeleński, 1968, s. 188–198), m.in. złudzenia spowodowane ułożeniem linii i figur, złudzenia wywołane przez kontrast otoczenia czy będące efektem odwrócenia uwagi. Narracja towarzysząca wszystkim eksponatom związanym ze złudzeniami polegała na porównaniu długości narysowanych odcinków oraz sprawdzeniu swoich przypuszczeń za pomocą linijki. Kolejne złudzenia dotyczyły naruszenia rytmu: „Czy żółte kółka w rzędach leżą na prostych? Czy te proste są równoległe? Sprawdź, przykładając linijkę" (ExploraPark[1]) oraz były spowodowane ruchem, np. ekspozycja *Brzydale* w Centrum Nauki Kopernik[2]: „Spójrz na twarze na tarczach. Obróć tarcze do góry nogami i popatrz jeszcze raz". Przestrzenne złudzenie optyczne zostało przedstawione na ekspozycjach dotyczących perspektywy. W ExploraPark było to eksperymentowanie z przykładaniem przezroczystej dziewczynki w różne miejsca kartki z narysowanym perspektywicznym korytarzem i sprawdzanie wielkości postaci. W Centrum Nauki Kopernik perspektywa ukryta była w specjalnie przygotowanym pokoju: „Tutaj wzrost wydaje się zupełnie względny i zmienia się co kilka kroków! Wszystko dzięki zabawie perspektywą i sztuczce scenograficznej, których mózg nie jest w stanie zdemaskować… Ludzie chodzący po pomieszczeniu przybliżają się lub oddalają od ciebie, choć na pierwszy rzut oka tego nie zauważasz". Kolejne eksponaty, które dotyczyły złudzeń, polegały na dwuznaczności obrazu, to znaczy, że na jednym rysunku można było dopatrzeć się smoków lub twarzy człowieka, na innym lecących ptaków lub pływających ryb, na kolejnym – czarnych jeźdźców na białym tle lub białych jeźdźców na czarnym tle itp. Innymi eksponatami związanymi z postrzeganiem były lustra do oglądania obrazów anamorficznych. W obu centrach lustra miały postać walców, dodatkowo w Centrum Nauki Kopernik obrazy anamorficzne można było oglądać w lustrach stożkowatych. Obrazy anamorficzne powstają poprzez celowe zdeformowanie proporcji w taki sposób, aby odczyt obrazu możliwy był tylko przez patrzenie na niego pod pewnym kątem

[1] Wszystkie cytaty w artykule pochodzą z opisów ekspozycji i eksponatów znajdujących się w ExploraPark.

[2] Wszystkie cytaty w artykule pochodzą z opisów ekspozycji i eksponatów znajdujących się w Centrum Nauki Kopernik.

lub odbicie go w odpowiednim zwierciadle. W obu centrach oprócz rysunków do oglądania dołączona do ekspozycji była również siatka dyfrakcyjna. Można było samodzielnie wykonać jakiś rysunek, a następnie zobaczyć jego odbicie w lustrze. Za pomocą luster pokazano również działanie kalejdoskopu, które odbija obraz wielokrotnie.

Do innych eksponatów matematycznych należały modele wstęgi Möbiusa, trójkąt Pascala, struktury fraktalne, krzywe stożkowe, most Leonarda oraz modele demonstrujące zależności twierdzenia Pitagorasa i jego geometrycznego dowodu.

Eksponaty związane z zagadnieniami liczbowymi dotyczyły: systemu binarnego, obliczeń na liczbach naturalnych za pomocą liczydła, a także wykorzystywały kwadraty magiczne, klocki do układanie ułamków oraz model trójkąta Pascala i jego związek z dwumianem Newtona. System dwójkowy został przedstawiony za pomocą dwóch zegarów. Na zegarze tarczowym wypisane były kolejne godziny w systemie binarnym, tj. pierwsza godzina – 0001, druga – 0010, trzecia – 0011, czwarta – 0100, piąta – 0101, szósta – 0110, siódma – 0111, ósma – 1000, dziewiąta – 1001, dziesiąta – 1010, jedenasta – 1011, dwunasta – 1100. Na zegarze elektronicznym podano godzinę tradycyjnie, w systemie dziesiętnym, np. 11:53:02, i pokazano jej zapis binarny w postaci zamalowanych kół na odpowiedniej pozycji w rzędach: $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$ i $8 = 2^3$. Liczydło chińskie i klocki z liczbami do składania kwadratów magicznych były wyposażone w instrukcje. Opis dotyczący liczydła zawierał sposób odczytywania liczb i ich ustawiania oraz wyjaśniał, w jaki sposób należy wykonywać na nim dodawanie. Opis kwadratu magicznego w ExploraPark dotyczył wyjaśnienia pojęcia *kwadrat magiczny* i wskazywał, że jest to taki kwadrat, w którym suma liczb w każdym wierszu, kolumnie i przekątnej jest taka sama oraz zawierał informacje o znanych kwadratach magicznych: „Najsłynniejszym kwadratem magicznym jest ten, który umieścił Albrecht Dürer na swoim miedziorycie «Melancholia». Zapewne nieprzypadkowo w dwóch wewnętrznych kratkach ostatniego wiersza tego kwadratu stoją obok siebie liczby 15 i 14, składające się na datę powstania grafiki – 1514". Natomiast klocki z ułamkami nie miały opisu; były to ułamki w kształcie kołowym i prostokątnym, przedstawiające $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ całości, które można było składać w formie większych i mniejszych prostokątów i np. porównywać, które klocki w zestawieniu tworzą „1" lub inne liczby.

Ostatni z eksponatów – trójkąt Pascala, który w ExploraPark został przedstawiony do 15 miejsca – przedstawiał koncepcję użytecznego tabelarycznego zestawienia współczynników dwumiennych, zaproponowaną przez Pascala. Narracja do tego eksponatu wprowadzała zwiedzających w struktury fraktalne: „Wykonaj ćwiczenie według instrukcji. Liczby umieszczone w kółkach dziel przez 2. Gdy reszta będzie = 0, włóż do kółka piłkę o kolorze zielonym. Gdy reszta będzie = 1, włóż do kółka piłeczkę o kolorze czerwonym". Instrukcja ta łączyła arytmetyczne wyszukiwanie liczb parzystych i nieparzystych z geometryczną strukturą samopodobną, którą ilustrowały powstające na eksponacie mniejsze i większe trójkąty.

Eksponaty dotyczące zagadnień geometrycznych dotyczyły mozaik, puzzli, geometrycznych dowodów Pitagorasa, drzewa Pitagorasa, symetrii lustrzanej oraz łamigłówek. Mozaiki Penrose'a, Eschera i w postaci chińczyka zostały przedstawione jako klocki do układania, bez jakichkolwiek opisów. Mozaika Penrose'a składała się z dwóch typów trójkątów równoramiennych, jeden o kątach 72°, 72°, 36°, drugi o kątach 36°, 36°, 108°. Mozaiki Eschera, które powstają z „wyzwolonego prostokąta", były pokazywane za pomocą dwóch różnych klocków w kształcie zwierząt, np. kangura, z których można było wypełnić płaszczyznę. Mozaiki w kształcie chińczyka powstają z „wyzwolonego trójkąta równobocznego". Mozaiki bliźniacze nie były reprezentowane przez klocki, lecz jako plansze, na których przedstawiono po jednej stronie mozaiki platońskie i archimedesowskie, natomiast po drugiej stronie mozaiki bliźniacze do nich. Mozaiki platońskie to takie, które są złożone z samych trójkątów równobocznych, kwadratów lub sześciokątów foremnych. Mozaiki archimedesowskie to takie, które w każdym wierzchołku (węźle) skupiają zestaw różnych, ale zawsze takich samych wielokątów foremnych. Kształt płytki mozaiki bliźniaczej powstaje, jeżeli wyznaczymy środki figur umieszczonych w węźle mozaiki platońskiej lub archimedesowskiej i połączymy je odcinkami (Mulawa, 2016, s. 35–46). Pokazano też puzzle IQ Block składające się z 10 wielokątów, które mają wszystkie boki prostopadłe i którymi trzeba zapełnić kwadrat o wymiarach 8 na 8. Do geometrycznych łamigłówek należały również tangram, serce, koło, jajko, zoo, ośmiokąt, które składały się z różnych figur. Na przykład tangram z 7 wielokątów; serce z 4 wielokątów i 5 wycinków; koło z 10 figur; jajko z 9 figur; zoo z 15 wielokątów; ośmiokąt z 7 wielokątów. I w każdym przypadku trzeba było składać z elementów postacie, np. zwierzęta w Centrum Nauki Kopernik; oprócz tangramu i pitagorejskiej łamigłówki były również wieże Hanoi i łamigłówki, w których należało zdjąć pętle lub wyciągnąć obręcz.

W badanych centrach pojawiają się również postacie znanych matematyków. W narracji do eksponatu prezentującego wstęgę Möbiusa w Centrum Nauki Kopernik mamy fragment dotyczący jej twórcy: „Taką wstęgę wymyślił niemiecki matematyk August Möbius w połowie XIX wieku". W opisie eksponatu *Rozeta* autorzy umieścili informację dotyczącą włoskiego matematyka i filozofa Luigi Guido Grandiego, który w wieku XVIII znalazł równanie opisujące ornamenty. W narracji do ekspozycji *Prostowanie koła*, również znajdującej się w Centrum Nauki Kopernik, nawiązano do matematyków i astronomów – Kopernika i Nasir ad-Din Tusiego: „mimo, że ten ruch – jedno koło toczy się wewnątrz drugiego, wydaje się bardzo skomplikowany – długopis rysuje linię prostą! Dzieje się tak zawsze, gdy średnica mniejszego koła równa jest promieniowi większego. Matematycy nazywają to geometryczne prawo «Twierdzeniem Kopernika», dlatego że jego opis znajduje się w dziele «O obrotach sfer niebieskich». Dziś wiemy, że wcześniej to twierdzenie udowodnił arabski matematyk i astronom Nasir ad-Din Tusi. Obaj uczeni wykorzystali je do opisu ruchu planet". W narracji ExploraPark do ekspozycji *Między Pitagorasem, Newtonem a Pascalem* pojawiły się trzy nazwiska matematyków, których autorzy ekspozycji połączyli w opisie drzewa pitagorejskiego, dwumianu Newtona i trójkąta Pascala: „Liczby kwadratów na kolejnych poziomach drzewa pitagorejskiego, współczynniki rozwinięcia dwumianu Newtona oraz liczby kolejnego rzędu trójkąta Pascala to te same liczby". Siedem nazwisk pojawia się w opisie *Szkoły Ateńskiej*, malowidła ukazanego w ExploraPark, na którym Rafael namalował symboliczne spotkanie wielkich filozofów starożytności: „w centrum stoi Platon i Arystoteles. Platon pokazuje niebo jako źródło wszystkich inspiracji i idei. Arystoteles wskazuje ziemię, przyrodę. Starzec leżący na schodach to Diogenes, a opierający się o blok kamienny – Heraklit. Na malowidle pojawiają się także: Pitagoras (na pierwszym planie z otwartą księgą), Sokrates… oraz Euklides (na pierwszym planie po prawej, tłumaczący swoim uczniom tajniki geometrii". Platon, założyciel Akademii Platońskiej, w kosmologii wykorzystywał teorię pięciu wielościanów foremnych zwanych bryłami platońskimi, tj. czworościanu, sześcianu, ośmiościanu, dwunastościanu i dwudziestościanu. Wprowadził pojęcia analizy i syntezy (Waliszewski, 1997, s. 276). Arystoteles to twórca logiki sylogizmów, czyli sposobu wnioskowania, w którym z dwóch przesłanek wyprowadza się jeden wniosek. Logika ta była uważana za naukę doskonałą do około XIX wieku (Crilly, 2022, s. 84–86). Euklides to autor *Elementów*, które były syntezą starożytnej wiedzy z geometrii i teorii liczb (Waliszewski, 1997, s. 82).

Postacie matematyków pojawiają się również w grach, które znaleźć można w centrach nauki. Angielski matematyk John Horton Conway pojawia się w opisie gry, którą sam stworzył w roku 1970. To tzw. Gra w życie, której zasady opierają się na trzech regułach: „Jeśli bakteria ma więcej niż trzech sąsiadów, obumiera wskutek zatłoczenia. Jeśli mniej niż dwóch sąsiadów – obumiera, tym razem z powodu osamotnienia. Pusta komórka, która sąsiaduje z dokładnie trzema bakteriami («rodzicami»), w kolejnej jednostce czasu rodzi się" (Centrum Nauki Kopernik). W kolejnej grze dla dwóch osób, OЯTHO, wspomniano o Kartezjuszu – twórcy układu współrzędnych. Gra ta polega na tym, że każdy z graczy kontroluje jedną współrzędną w układzie kartezjańskim. Celem gry jest skoordynowanie działań, aby przeprowadzić piłeczkę przez trasę w jak najkrótszym czasie.

Najwięcej nawiązań w obu centrach odnosi się do Pitagorasa. W Centrum Nauki Kopernik na ekspozycji dotyczącej muzyki, przy eksponacie *Śladami Pitagorasa. Monochord 1*, możemy się dowiedzieć, że: „bardzo proste zależności między liczbami całkowitymi stanowią podstawę popularnego systemu tonalnego w muzyce. Pitagoras wiedział już o tym ponad 2500 lat temu". Również w ExploraPark można znaleźć wiele nawiązań do Pitagorasa, np. w ekspozycji *Od Pitagorasa do Fermata*, w której krótko przedstawiono sylwetki dwóch matematyków: Fermata i Wilesa. Pierwszy z nich w XVII wieku sformułował twierdzenie, że żadne liczby naturalne x, y, z i n nie spełniają zależności $x^n + y^n = z^n$, natomiast drugi w roku 1995 twierdzenie to udowodnił (Crilly, 2022, s. 251–255). Pitagoras pojawia się również w następujących narracjach: *Łódź pitagorejska*, gdzie wyjaśniono, że: „Łódź pitagorejska to parafraza samopodobnej figury geometrycznej zwanej «trójkątem Sierpińskiego»"; *Pitagorejski kalafior* i *W pitagorejskim lesie*, w których mówi się o strukturze fraktalnej; w *Ślimaku pitagorejskim*, w której mówi się o konstrukcji geometrycznej pierwiastków kwadratowych kolejnych liczb naturalnych; w *Twierdzeniu Pitagorasa*, które dotyczy podstawowej, znanej ze szkoły zależności dotyczącej pól kwadratów zbudowanych na odpowiednich bokach trójkąta prostokątnego, jak również polach trójkątów równobocznych, półkul, sześciokątów foremnych. W narracji *Trójkąty pitagorejskie* podano m.in. przykładowe długości boków trójkątów prostokątnych, np. 3,4,6; 5,12,13; 7,24,25; 9,40,41; 11,60,61; 13,84,85 itd., a w narracji *Gwiazda pitagorejska* pojawiła się informacja na temat tej gwiazdy, Pitagorasa i jego uczniów.

Aktywności matematyczne

Kolejnym elementem kultury matematycznej, która występowała w badanych centrach, była narracja przy wybranych eksponatach mająca wywołać aktywność matematyczną, np. dowodzenie twierdzeń, manipulację, eksperymentowanie, uogólnianie, klasyfikowanie. Poprzez mierzenie można było sprawdzić, czy odcinki są tej samej długości; również za pomocą linijki można było sprawdzić, czy dane proste są równoległe. Eksperymentalnie można było zauważyć, jaki kąt daje jaką liczbę odbić w kalejdoskopie i wyciągnąć wnioski, że im większy kąt, tym liczba odbić mniejsza. To znaczy dla kąta 180° mamy dwa odbicia, dla kąta 120° – trzy odbicia, dla kąta 90° – cztery, dla kąta 72° – pięć, dla kąta 60° – sześć odbić, dla kąta 45° – osiem, dla kąta 36° – dziesięć i dla kąta 30° – dwanaście odbić.

Poprzez interakcje z eksponatem w kształcie stożka wypełnionego kolorową wodą można było zobaczyć krzywe stożkowe. Tafla wody w obracającym się stożku wyznaczała na jego powierzchni kolejno: okrąg, elipsę, łuki hiperboli i paraboli. Inną aktywnością w centrach nauki było rysowanie, np. na ekspozycji dotyczącej siatki perspektywicznej. Składała się ona z kwadratowej siatki, drewnianych eksponatów w kształcie ściętego walca, kuli i prostopadłościanu, które należało przerysować na kartkę papieru. Pomóc w tym miał podświetlony pulpit, na którym umieszczono kartkę oraz przymocowany do pulpitu element, przez który należało patrzeć podczas rysowania kolejnych elementów martwej natury. Rysowanie krzywych przy użyciu kół zębatych miało miejsce przy ekspozycji *Prostowanie koła* (Centrum Nauki Kopernik), gdzie umieszczono następującą instrukcję: „Weź kartkę papieru i połóż ją pod mechanizm. Włóż długopis w otwór na obwodzie mniejszego koła i przetocz je wewnątrz większego".

Dzięki manipulowaniu klockami w różnych kształtach można było złożyć mozaiki, puzzle lub bryły.

Do najtrudniejszych aktywności należało poruszanie się w taki sposób, aby linia naszego ruchu pokryła się z wyświetlanym na monitorze wykresem funkcji (*Spacer z funkcją* w Centrum Nauki Kopernik). Podczas tej aktywności należało łączyć wiedzę matematyczną z fizyką, żeby dostrzec ruch ciała w czasie. W tym samym centrum można było odkryć własność jednostronności wstęgi Möbiusa, jeśli postąpiło się zgodnie z instrukcją: „Ustaw dwie strzałki obok siebie. Przesuń jedną z nich po całej powierzchni wstęgi. Jak wyglądała jej droga? Ile razy minąłeś drugą strzałkę?".

Z kolei ExploraPark zapraszał do zbadania *Geometrycznego dowodu twierdzenia Pitagorasa* w następujących słowach: „Gdy ułożymy wszystkie kolorowe figury w dużym kwadracie, a następnie przełożymy je do dwóch mniejszych, to udowodnimy twierdzenie Pitagorasa".

Zastosowanie matematyki w innych dziedzinach wiedzy i w życiu

Trzecim elementem kultury matematycznej, który poddano analizie, było zastosowanie matematyki w innych dyscyplinach wiedzy i w życiu. Przedstawione w tej części artykułu ekspozycje i opisy można znaleźć w Centrum Nauki Kopernik. Na ekspozycji *Idealna asymetria* można było dowiedzieć się o asymetryczności ludzkiej twarzy. Wystarczyło zrobić zdjęcie swojej twarzy, a następnie zobaczyć, jak wyglądałaby, gdyby była swoim lewym lub prawym odbiciem. Eksperyment pokazuje, po pierwsze, że ludzka twarz nie jest symetryczna, po drugie, że jeśli byłaby symetryczna względem jednej z części, wyglądałaby nienaturalnie i nieatrakcyjnie.

Zależności między liczbami całkowitymi, które są wykorzystywane w systemie tonalnym w muzyce, zostały opisane na ekspozycji *Śladami Pitagorasa*: „Kiedy podzielimy strunę na 2, 3 lub 4, to z połączenia dźwięku podstawowego i dodatkowych otrzymamy dźwięki brzmiące pięknie lub harmonijnie. Podobne zależności odnajdujemy także w przyrodzie, sztukach wizualnych i architekturze".

Z kolei nawiązanie do architektury odnaleźć można było na ekspozycji *Rozeta*: „jednym z najbardziej charakterystycznych elementów architektury średniowiecznej, zwłaszcza gotyckiej, są rozety – okrągłe okna z delikatną konstrukcją kamienną, najczęściej ozdobioną witrażami".

W badanych centrach wykorzystano również matematykę do wizualizacji zjawisk typu globalne ocieplenie, licznik populacji ludności oraz chwiejna równowaga. Pierwsze ze zjawisk przedstawiono w kształcie przestrzennego wykresu: „Patrzysz na wykres słupkowy, który pokazuje stężenie dwutlenku węgla (CO_2) w atmosferze ziemskiej od roku 1400 przez czasy obecne po prognozę na rok 2400. Stężenie CO_2 liczone jest w jednostkach ppm". Na wykresie mamy np. rok 2025 i przylegający do niego słup w kształcie pomarańczowego walca z napisem 420 ppm, co oznacza, że na milion cząsteczek powietrza średnio 420 spośród nich będzie cząsteczkami CO_2. Dla przykładu dla roku 2000 jest przyporządkowany niższy żółty walec z napisem 374 ppm, dla roku 2050 przyporządkowany jest już czerwony walec z napisem 540 ppm, podobnie dla roku 2075 – 690 ppm (ekspozycja *Droga do globalnego ocieplenia*). Drugie zjawisko ukazano na wielkim ekranie w postaci licznika, który pokazywał szacowaną na chwilę obecną liczbę mieszkańców Ziemi. Licznik ten non stop pokazywał inne liczby. Natomiast na mniejszych ekranach dotykowych można było wybrać na mapie świata dany region i zobaczyć liczbę narodzin i zgonów oraz ruchy migracyjne (ekspozycja *Populacja*). *Chwiejną równowagę* przedstawiono w gablocie za pomocą klocków do gry w Jengę. W grze tej przegrywa osoba, która podczas swojego ruchu wyciągania klocka przewróci całą wieżę: „Integrację w lokalny system, w szczególności usuwanie z niego gatunków, można porównać do tej gry. Trudno powiedzieć, w którym momencie nastąpi moment krytyczny i jakie wydarzenie okaże się tym «klockiem», po którego wyjęciu nieodwracalnie rozpadnie się cała konstrukcja".

Funkcje poznawcze eksponatów

Na przykładzie zagadnienia dotyczącego twierdzenia Pitagorasa trzy funkcje poznawcze w omawianych centrach są realizowane w następujący sposób (por. Karwasz i Kruk, 2012, s. 45–49):

- funkcja ludyczna – np. poprzez układanie za pomocą klocków ilustracji do twierdzenia Pitagorasa, ważenie i porównywanie wag poszczególnych części, budowanie drzewa pitagorejskiego z klocków itp.;
- funkcja dydaktyczna – poprzez manipulowanie klockami można wykonać dowody geometrycznych twierdzeń Pitagorasa, jak również uogólnionego twierdzenia Pitagorasa, zgodnie z którym kwadraty znajdujące się na bokach trójkąta prostokątnego można zamienić na dowolne figury przy zachowaniu

jedynie stosunku ich pól, np. 3:4:5, aby zależność opisana twierdzeniem Pitagorasa zachodziła. Kolejnym przykładem opisywanej funkcji jest drzewo pitagorejskie oraz jego związek z dwumianem Newtona i trójkątem Pascala (kolejne poziomy drzewa pitagorejskiego, współczynniki rozwinięcia dwumianu Newtona oraz liczby kolejnego rzędu trójkąta Pascala to te same liczby). Zagadnienia te pokazują związek geometrii z algebrą i arytmetyką;

- funkcja quasi-naukowa – poprzez przechodzenie od twierdzenia Pitagorasa, czyli zależności $x^2 + y^2 = z^2$, do twierdzenia Fermata.

Podsumowanie

Zgromadzone eksponaty matematyczne w badanych centrach dotyczyły zagadnień takich, jak: złudzenia optyczne, perspektywa, anamorfozy, fraktale, mozaiki, obliczenia na liczydle, wstęga Möbiusa, puzzle i problemy geometryczne, twierdzenie Pitagorasa i jego zastosowanie. Dotyczyły więc zagadnień z arytmetyki, geometrii i algebry. Nie były przedstawione językiem formalnym, tj. językiem symboli matematycznych, lecz językiem naturalnym, aby móc dotrzeć do jak największej liczby zainteresowanych. Niektóre z eksponatów czy poruszanych problemów mogłyby być wykorzystane w edukacji szkolnej jako wprowadzenie do tematu czy przećwiczenie zagadnień z podstawy programowej w atrakcyjny sposób. Interaktywność prezentowanych eksponatów dawała również możliwość samodzielnego odkrywania zależności, reguł czy własności badanych problemów. Niektóre z nich mogą również pełnić każdą ze zdefiniowanych przez Jolantę Kruk funkcji poznawczych, tj. ludyczną, dydaktyczną i quasi-naukową.

Dodatkowym, rozszerzającym wiedzę elementem są nawiązania w narracjach eksponatów do sylwetek matematyków, jak również pokazanie ich wykorzystania w innych dziedzinach wiedzy lub w życiu. Dużym atutem jest również to, że stale tworzone są kolejne ekspozycje i wystawy oraz budowane nowe centra nauki w Polsce, co daje możliwość poznawania kolejnych zagadnień matematycznych i docierania do szerszej grupy osób. Uważam, że temat nie został w pełni wyczerpany. Powinien być w przyszłości uzupełniany i poddawany dalszym analizom, w miarę pojawiania się nowych wątków badawczych.

Bibliografia

Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching (mindset mathematics).* Jossey-Bass.

Bojarska-Sokołowska, A. (2019). *Pozaszkolne formy edukacji matematycznej. Popularyzacja matematyki, interaktywność w kształceniu, kultura matematyczna*. Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego w Olsztynie.

Centrum Nauki Kopernik. https://www.kopernik.org.pl

Crilly, T. (2022). *Matematyka. 50 idei, które powinieneś znać* (W. Bartol, tłum.). Wydawnictwo Naukowe PWN.

Davis, P.J., Hersh, R., Marchisotto, E.A. (2001). *Świat matematyki* (R. Duda, tłum.). Wydawnictwo Naukowe PWN.

Domoradzki, S. (b.d.). *Różne sposoby wspomagania twórczości matematycznej uczniów dzisiaj i w przyszłości.* ORE. Pobrane 25 lipca 2023 z: https://zasobyip2.ore.edu.pl/pl/publications/download/4322

Duda, R. (1990). Co to jest kultura matematyka? *Matematyka. Społeczeństwo. Nauczanie*, (5), 2–4.

ExploraPark – Centrum Aktywnej Edukacji. https://explorapark.pl

Flick, U. (2012). *Projektowanie badania jakościowego* (P. Tomanek, tłum.). Wydawnictwo Naukowe PWN.

Heinze, A. (2005). Mistake-handling activities in German mathematics classroom. W: H.L. Chick, J.L. Vincent (red.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (t. 3, s. 105–112). University of Melbourne.

Jeleński, S. (1968). *Lilavati. Rozrywki matematyczne.* WSiP.

Karwasz, G., Kruk, J. (2012). *Idee i realizacje dydaktyki interaktywnej – wystawy, muzea i centra nauki.* Wydawnictwo Naukowe UMK.

Kordos, M. (1995). Przedmowa. W: J. Górnicki, *Okruchy matematyki* (s. 7–10). Wydawnictwo Naukowe PWN.

Kordos, M. (2009). *Zobaczyć to, czego nie widać, czyli kultura matematyczna w praktyce.* Wydawnictwo Aksjomat.

Liebertz, Ch. (1988). *Kunstdidaktische Aspekte in der Museumpädagogik. Entwicklung und Gegenwart.* Deutscher Studien Verlag.

Luescher, A. (b.d.) *Education of the senses: Hugo Kükelhaus' empirical methodology*. Pobrane 3 grudnia 2023 z: https://www.researchgate.net/publication/277275960_Education_of_the_Senses_Hugo_Kukelhaus%27_empirical_methodology

Makiewicz, M. (2010). *Matematyka w obiektywie. Kultura matematyczna dla nauczycieli.* Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego.

Makiewicz, M. (2011). *Elementy kultury matematycznej w fotografii.* Studenckie Koło Naukowe Młodych Dydaktyków Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego.

Mulawa, J. (2016). *Magia matematyki. Ćwiczenia aktywne w nauczaniu… nie tylko matematyki*. Instytut Badań Kompetencji w Wałbrzychu.

Pawlak, R.J. (1993). Minimum edukacji matematycznej przyszłych nauczyciel. Kultura matematyczna. *Acta Universitatis Lodziensis. Folia Mathematica*, 6, 57–66.

Rapley, T. (2013). *Analiza konwersacji, dyskursu i dokumentów* (A. Gąsior-Niemiec, tłum.). Wydawnictwo Naukowe PWN.

Rubacha, K. (2008). *Metodologia badań nad edukacją.* Wydawnictwa Akademickie i Profesjonalne.

Tocki, J. (2006). *Struktura procesu kształcenia matematycznego* (cz. 1). Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.

Waliszewski, W. (red.). (1997). *Encyklopedia szkolna. Matematyka*. WSiP.

Włodarczyk, E. (2003). Kultura [hasło]. W: J. Pilch (red.), *Encyklopedia pedagogiczna XXI wieku* (t. 2, s. 960). Wydawnictwo Akademickie Żak.