Roman Murawski

O czym rozprawiają matematycy, czyli o statusie bytowym przedmiotów matematyki*

ABSTRACT. Roman Murawski, *O czym rozprawiają matematycy, czyli o statusie bytowym przedmiotów matematyki* [What do mathematicians dispute about, or on the ontological status of the objects of mathematics]. „Przestrzenie Teorii" 3/4, Poznań 2004, Adam Mickiewicz University Press, pp. 253-260. ISBN 83-232-1454-9. ISSN 1644-6763.

In this article the author considers various conceptions concerning ontological status of the objects of mathematics.
The relation is show between these problems and a dispute over universals, and then Platonism, conceptualism and nominalism as the fundamental standpoints on the question of mathematical objects are presented. Examples are given of concrete (specific) theories within these standpoints and their implications (also epistemological ones) are shown.

W każdej nauce jedną z najważniejszych kwestii filozoficznych jest problem ontologii jej przedmiotu, tzn. problem tego, czym są obiekty, które dana nauka bada, jak i gdzie one istnieją. Rozstrzygnięcia w tej kwestii determinują (w jakimś przynajmniej zakresie) zasób i charakter metod danej nauki oraz, w konsekwencji, jej epistemologię i metodologię. W ten sposób wyznaczona zostaje niejako przestrzeń teorii (w sensie ontologicznym i epistemologicznym).

O czym zatem mówi matematyka? Czym są obiekty, które się w niej rozważa i bada? Co stanowi przestrzeń matematyki jako nauki?

Najprościej powiedzieć można by tak: matematyka bada liczby oraz figury geometryczne i ich własności. Odpowiedź ta jest jednak niewystarczająca, choćby z tego powodu, że nie wyczerpuje ona całej treści matematyki współczesnej. Z drugiej strony, nawet jeśli ją przyjąć, to powstaje z kolei pytanie o to, czym są liczby, jak i gdzie one istnieją. O to samo można pytać w odniesieniu do figur geometrycznych czy innych jeszcze tworów, jeśli takowe dopuścimy.

Przy okazji widać, że mówiąc o przedmiotach matematyki i jej przestrzeni badawczej, trzeba wziąć pod uwagę aspekt historyczny. Przecież przedmiot zainteresowania badawczego matematyków zmieniał się (i nadal się zmienia) w czasie. Czym innym interesowali się matematycy

* Praca napisana w ramach polsko-flamandzkiego projektu badawczego BIL 01 80.

starożytnej Grecji (i co innego byli skłonni uznać za przedmiot matematyki), a co innego stanowi przedmiot badań matematyków współczesnych. Ustalmy więc, że mówiąc w dalszym ciągu o przedmiotach matematyki i badając ich status ontologiczny, mieć będziemy na myśli matematykę współczesną i badane w niej i przez nią obiekty (oczywiście jest to znów określenie nie do końca precyzyjne i ostre, ale wystarczające dla naszych celów).

Okazuje się, że pytanie o status bytowy przedmiotów matematyki związane jest bardzo silnie ze starym sporem o powszechniki, czyli uniwersalia.

Przypomnijmy, że problem ten postawiony został przez Platona, który pytał: co odpowiada pojęciom ogólnym takim, jak prosta, liczba, człowiek, dobro, piękno. Udzielane odpowiedzi można podzielić na cztery grupy, otrzymując w ten sposób cztery klasyczne stanowiska w sporze o uniwersalia: realizm skrajny, realizm umiarkowany, konceptualizm i nominalizm.

Wymienione koncepcje mają swe odbicie w ontologii matematyki, czyli w kwestii tytułowego pytania tego artykułu, dokładniej, swoje odbicie znajdują tu stanowiska pierwsze, trzecie i czwarte (dlaczego stanowisko drugie nie ma swego odpowiednika, powiemy później). W związku z tym wyróżnia się trzy następujące stanowiska w ontologii matematyki: platonizm (odpowiednik realizmu skrajnego), konceptualizm oraz nominalizm. Omówimy je teraz krótko.

Zacznijmy od platonizmu. Otóż terminem tym określa się stanowisko głoszące, iż przedmioty matematyki istnieją obiektywnie, samoistnie, niezależnie od czasu, przestrzeni i poznającego umysłu. W szczególności zatem istnieją zarówno liczby naturalne 0, 1, 2, ..., jak i zbiór wszystkich tych liczb **N**, przy czym ten ostatni jest pewnym odrębnym tworem, niezależnym w swym istnieniu od poszczególnych liczb. W konsekwencji matematyk nie tworzy, ale odkrywa obiekty matematyczne i ich własności. Nawet więc, gdyby na świecie nie było żadnego matematyka i żadnego dzieła matematycznego, to i tak istniałyby wszystkie obiekty matematyczne (te, które znamy dziś, te, które poznamy jutro, ale i te, których nigdy nie poznamy i o których matematycy nigdy mówić nie będą). Przy przyjęciu takiego stanowiska trzeba więc mówić o tym, że dany matematyk *odkrył* daną teorię, a nie że ją *stworzył*. A zatem w szczególności powiedzieć trzeba, że Leibniz i Newton odkryli rachunek różniczkowy i całkowy, a nie, że go stworzyli. Dodajmy jeszcze tylko, iż platonizm nie głosi, że przedmioty matematyki należą do Platońskiego świata idei. Mogą one tam należeć, ale nie muszą.

Platonizm dopuszcza istnienie każdego obiektu, który jest niesprzeczny. Zatem wystarczającym (i oczywiście koniecznym) kryterium istnienia w matematyce staje się wewnętrzna niesprzeczność formalna. Dzięki temu (ontologiczna) przestrzeń matematyki jest maksymalnie szeroka i obszerna.

Platonizm jest koncepcją bardzo popularną wśród matematyków. Głosili go w szczególności sam Platon, Euklides (ok. 365-ok. 300 p.n.e.) czy neoplatonik Proklos Diadochus (410-485). Ten ostatni twierdził, że przedmioty matematyki są czymś pośrednim między bytami najwyższymi, które cechują się prostotą, niezłożonością i niepodzielnością, a obiektami materialnymi, które są złożone i podzielne. Źródłem przedmiotów matematycznych jest dusza, która zawiera ich prawzory co do istoty.

Innym przedstawicielem platonizmu w filozofii matematyki był Georg Cantor (1845-1918), matematyk niemiecki, twórca teorii mnogości, podstawowej dziś dyscypliny matematycznej, która stanowi fundament matematyki zarówno w sensie filozoficznym, jak i logicznym. Swym przekonaniom platońskim dawał wyraz w różnych miejscach. Najjaśniej wyraził to w swej rozprawie habilitacyjnej z roku 1869, której trzecia teza brzmiała: „Numeros integros simili modo atque corpora coelestia totum quoddam legibus et relationibus compositum efficere”[1]. Potwierdził to swoje stanowisko i u kresu swej twórczej aktywności, gdy fundamentalne dzieło *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (1895-97) zaopatrzył w trzy następujące motta, stanowiące jego filozoficzne *credo*: „Hypotheses non fingo”, „Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribae fideles ab ipsius naturae voce latas et prolatas excipimus et describimus”, „Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia”[2]. W jednym z listów pisał też, że „w stosunku do treści moich prac jestem jedynie sprawozdawcą i urzędnikiem”.

Do zwolenników platonizmu należeli również twórca nowoczesnej logiki formalnej Gottlob Frege (1848-1925) i największy logik i badacz podstaw matematyki XX wieku Kurt Gödel (1906-1978). Ten ostatni pisał:

> Klasy i pojęcia mogą być pojmowane jako rzeczywiste obiekty istniejące niezależnie od naszych definicji i konstrukcji [...] Wydaje mi się, że założenie istnienia takich obiektów jest tak samo uzasadnione, jak przyjęcie istnienia ciał fizycznych, a jest przecież wiele racji, by przyjąć ich istnienie.

Gödel powołuje się przy tym na Bertranda Russella (1872-1970), który pisał:

---

[1] „Liczby całkowite, podobnie jak i ciała niebieskie, tworzą za pomocą praw i relacji pewien stały porządek”.

[2] „Fikcji nie tworzę”; „Praw nie poddajemy pod osąd własny rzeczom czy rozumowi, lecz jako wierni pisarze wydobywamy je ukryte i wyłożone w głosie samej natury i opisujemy je”; „Przyjdzie czas, w którym te rzeczy, które teraz są zakryte, wyciągnięte zostaną ze starannością i pilnością na światło dzienne na długie wieki”.

> Logika [a także matematyka, jak wynika z dalszych rozważań Russella – R. M.] zajmuje się światem realnym, tak jak zoologia, aczkolwiek bada bardziej abstrakcyjne i ogólne jego własności.

Dodajmy tu jednak, że Russell nie byl konsekwentny w tych swoich przekonaniach. Później zmienił zdanie i w swym podstawowym dziele *Principia Mathematica* (opublikowanym wspólnie z A.N. Whiteheadem w latach 1910-1913) głosił nominalizm.

Przyjęcie platonizmu implikuje odpowiednią postawę badawczą matematyka. Otóż matematyk staje wobec danej mu rzeczywistości matematycznej, w której nie może nic zmienić, a którą ma adekwatnie opisać. Nie jest więc panem sytuacji, ale niejako jej sługą. Trafnie wyraził to polski logik Jan Łukasiewicz (1878-1956), pisząc tak:

> Chciałbym na zakończenie tych uwag nakreślić obraz związany z najgłębszymi intuicjami, jakie odczuwam zawsze wobec logistyki. Obraz ten rzuci może więcej światła na istotne podłoże, z jakiego przynajmniej u mnie wyrasta ta nauka, niż wszelkie wywody dyskursywne. Otóż ilekroć zajmuję się najdrobniejszym nawet zagadnieniem logistycznym, szukając na przykład najkrótszego aksjomatu rachunku implikacyjnego, tylekroć mam wrażenie, że znajduję się wobec jakiejś potężnej, niesłychanie zwartej i niezmiernie odpornej konstrukcji. Konstrukcja ta działa na mnie jak jakiś konkretny dotykalny przedmiot, zrobiony z najtwardszego materiału, stokroć mocniejszego od betonu i stali. Nic w niej zmienić nie mogę, nic sam dowolnie nie tworzę, lecz w wytężonej pracy odkrywam w niej tylko coraz to nowe szczegóły, zdobywając prawdy niewzruszone i wieczne. Gdzie jest i czym jest ta idealna konstrukcja? Filozof wierzący powiedziałby, że jest w Bogu i jest myślą Jego.

Przytoczone słowa Łukasiewicza odnoszące się wprawdzie wprost do logiki (dokładniej logistyki, jak naówczas nazywano logikę formalną), odnoszą się też do matematyki i – moim zdaniem – trafnie opisują odczucia pracującego matematyka.

Zauważmy jeszcze na koniec tych rozważań o platonizmie, że implikuje on, iż każdy problem matematyczny typu pytania-rozstrzygnięcia „tak-nie" ma już istniejące rozwiązanie. Nie ma tu więc miejsca na problemy nierozstrzygalne! Chodzi tylko o to, by znaleźć właściwą odpowiedź. Może to być bardzo frustrujące dla matematyka, któremu nie udaje się znaleźć tego rozwiązania (co prowadzić może do smutnych konsekwencji, jak to pokazuje przykład Cantora, w przypadku którego niemożność rozwiązania problemu kontinuum, razem z brakiem zrozumienia i akceptacji ze strony innych matematyków dla stworzonej przez niego teorii mnogości, doprowadziły do załamania nerwowego i dającej o sobie znać do końca życia choroby psychicznej).

Przejdźmy teraz do drugiego stanowiska, a mianowicie do konceptualizmu. Według niego istnieją tylko te obiekty matematyczne, które są konstruowalne, czyli takie, które można skonstruować z obiektów, których istnienie jest intuicyjnie jasne. Zauważmy przede wszystkim, że podstawowe tu pojęcie konstruowalności jest bardzo nieprecyzyjne i nieostre. Nie jest *a priori* jasne, o jaką konstruowalność tu chodzi, jakie metody dopuszcza się przy konstrukcjach (skończone tylko czy także nieskończone i w jakim zakresie). W zależności od dalszych precyzacji można wyróżnić następujące wersje ontologiczne konceptualizmu:

- obiektywizm, który głosi, że przedmioty matematyki to obiektywne wytwory procesów konstruowania istniejące niezależnie od podmiotu, który je konstruuje,
- intencjonalizm, według którego przedmioty matematyki istnieją intencjonalnie (tak jak twory kulturowe, a więc w szczególności utwory literackie czy muzyczne),
- mentalizm, który traktuje przedmioty matematyki jako wytwory aktów myślowych i twierdzi, że istnieją one tylko w tych aktach,
- stanowisko głoszące, że przedmioty matematyki to konkretne przedmioty czasowo-przestrzenne.

Najbardziej znanym i najmocniej rozwiniętym kierunkiem konceptualistycznym w filozofii matematyki jest intuicjonizm chcący oprzeć całą matematykę na pierwotnej intuicji liczby naturalnej. Twórca intuicjonizmu L. E. J. Brouwer (1881-1966) próbował ugruntować tę ostatnią, odwołując się do Kantowskiej koncepcji apriorycznego czasu. Według intuicjonizmu istnieć to tyle, co być konstruowalnym. Zwróćmy uwagę na to, że mówi się tutaj nie o aktualnie przeprowadzonych przez konkretnego matematyka konstrukcjach (a są też takie wersje konceptualizmu), ale o potencjalnych konstrukcjach idealnego matematyka.

Zwolenników konceptualizmu znaleźć można w różnych okresach historycznych. Był wśród nich na przykład Mikołaj z Kuzy (1401-1464), filozof, teolog, późniejszy kardynał. Głosił on, że liczby są dziełem ludzkim i istnieją tylko w naszym umyśle. Są one odbiciami (obrazami) liczb istniejących w umyśle Bożym. Podobnie ma się sprawa z figurami geometrycznymi. Do zwolenników konceptualizmu należał też Henri Poincaré (1854-1912), czołowy przedstawiciel konwencjonalizmu w filozofii nauki, czy wielki matematyk niemiecki Richard Dedekind (1831-1916). Ten ostatni, twórca ścisłej teorii liczb rzeczywistych, głosił na przykład, że liczby są wolnym wytworem umysłu ludzkiego (pisząc o tworzeniu liczb niewymiernych, używał niemieckiego słowa *erschaffen*, które znaczy „stwarzać" i które pojawia się w Księdze Rodzaju przy opisie stwarzania świata przez Jahwe).

Jedną z konsekwencji stanowiska konceptualistycznego jest konieczność odrzucenia nieskończoności aktualnej i możliwość dopuszczenia jedynie nieskończoności potencjalnej (i to tylko przeliczalnej), co stanowi wyraźne ograniczenie i zubożenie przestrzeni matematyki! Przyjęcie tylko obiektów konstruowalnych wymusza też odrzucenie pewnych metod dowodowych (na przykład niekonstruktywnych dowodów twierdzeń egzystencjalnych). To z kolei implikuje ograniczenie przestrzeni matematyki w zakresie akceptowanych wyników i dopuszczalnych metod, czyli w sensie metodologicznym.

Trzecim stanowiskiem w rozważanej kwestii statusu bytowego przedmiotów matematyki jest nominalizm. Głosi on, że istnieją tylko przedmioty jednostkowe i wszelkie wypowiedzi o innych obiektach, na przykład o zbiorach, można interpretować jedynie jako wypowiedzi (czy raczej skróty wypowiedzi) o indywiduach. Powstaje tu oczywiście od razu pytanie, czym mogą być indywidua? Wśród odpowiedzi na to pytanie znajdujemy dwa główne stanowiska. Jedno głosi, że mogą być one dowolnej natury (mamy wtedy do czynienia z nominalizmem formalnym), drugi dopuszcza tylko przedmioty indywidualne określonej natury (tak czynił na przykład T. Kotarbiński, dopuszczając w swoim reizmie tylko ciała).

Nominalizm ma swoich zwolenników wśród filozofów matematyki. Należeli do nich w szczególności B. Russell i A. N. Whitehead (ślady tego stanowiska widać wyraźnie w ich fundamentalnym dziele *Principia Mathematica*), należeli do nich logicy polscy Alfred Tarski i Stanisław Leśniewski. Ten ostatni traktował formuły logiczne jako konkretne fizyczne napisy. Kierunek ten ma wielu zwolenników i dziś, zwłaszcza w anglosaskiej filozofii matematyki (H. Field, J. P. Burgess, G. Rosen). Zauważmy, że nominalizm stanowi właściwie najsilniejsze zawężenie przestrzeni matematyki, eliminując z niej wszelkie obiekty abstrakcyjne.

Zwróćmy uwagę, że wśród koncepcji dotyczących ontologii matematyki nie ma swego odpowiednika realizm umiarkowany Arystotelesa. Dlaczego? Otóż zgodnie z nim należałoby traktować na przykład zbiory jako własności. Zatem istniałyby one tak, jak istnieją atrybuty, czyli zależnie od rzeczy, których są atrybutami. Wtedy jednak powstaje trudność związana z istnieniem tzw. cech koekstensywnych, tzn. cech różnych, ale wyznaczających ten sam zbiór przedmiotów. Aby zachować ekstensjonalny charakter tworów matematycznych (a zależy nam na tym, by matematyka miała charakter ekstensjonalny!), w tym zbiorów, cechy takie należałoby utożsamić. I tu powstają trudności.

*

Przedstawiliśmy powyżej trzy stanowiska w kwestii statusu bytowego przedmiotów matematyki. Zadać należy teraz pytanie: które z tych stanowisk jest słuszne, które jest właściwe, które prawdziwe? Odpowiedź brzmi: nie wiemy! Sama matematyka nie daje tu żadnego rozstrzygnięcia. Co więcej, brak odpowiedzi na to, zdawałoby się, zasadnicze pytanie nie stanowi żadnej przeszkody w skutecznym uprawianiu i rozwijaniu matematyki. Okazuje się, że matematykę można z powodzeniem uprawiać (i robi się to!), nie mając sprecyzowanych poglądów w rozważanej kwestii. Pozostaje oczywiście problem zasobu dopuszczalnych środków – pewne stanowiska ontologiczne ograniczają przecież ten zasób (na przykład konceptualizm dopuszcza jedynie metody i środki konstruktywne). Ale i tę trudność łatwo ominąć – można, jak czynili to matematycy ze szkoły polskiej, stosować dowolne środki (skończone, infinitystyczne, konstruktywne etc.), ale zawsze w sposób świadomy i wyraźnie zaznaczając przy każdym wyniku, jakich (nie przez wszystkich akceptowanych) środków się użyło w danym dowodzie. Jest to więc sposób na zachowanie maksymalnie szerokiej przestrzeni matematyki zarówno w sensie ontologicznym, jak i epistemologicznym, ale wymagający wyraźnej samoświadomości metodologicznej.

Przyznać trzeba, że matematycy rzadko zastanawiają się nad kwestiami filozoficznymi dotyczącymi przedmiotu uprawianej przez nich dziedziny. Obserwacja (i samoobserwacja) pokazuje jednak, że na ogół zachowują się oni w swej pracy badawczej jak platonicy. Oznacza to, że nie są panami czy kreatorami rzeczywistości matematycznej, przeciwnie, stają wobec danej im „twardej" rzeczywistości, którą starają się opisać. Przyjmują więc praktycznie możliwie najobszerniejszą przestrzeń matematyki, w której działają. Przy tym akceptując „na co dzień", roboczo, platonizm, „od święta", tzn. kiedy zastanawiają się nad kwestiami filozoficznymi (jeśli w ogóle to czynią!), matematycy deklarują się na ogół jako formaliści, tzn. twierdzą, że matematyka to zespół aksjomatyczno-dedukcyjnych systemów sformalizownych i cała praca matematyka polega na dedukcji twierdzeń z przyjętych aksjomatów za pomocą dowolnych poprawnych metod. Zauważmy jednak, że przy takim podejściu omija się właściwie kwestię statusu bytowego przedmiotów matematyki.

Rozważany w tym artykule problem statusu ontologicznego obiektów matematyki nabrał w ostatnim czasie nowego wymiaru. Otóż w związku z coraz szerszym stosowaniem komputerów w matematyce powstaje problem tego, jak istnieją obiekty kreowane komputerowo (na przykład fraktale)? Czy matematyk za pomocą komputera stwarza nową rzeczywistość istniejącą ... – No właśnie, gdzie? Na monitorze? W programie? A może komputer służy tylko do modelowania obiektywnie (po platońsku) istniejącej rzeczywistości matematycznej i dostarcza nowych metod i środków jej poznawania oraz umożliwia poznawcze dotarcie do takich jej obszarów, które bez użycia go byłyby niedostępne? Czy więc stosowanie komputerów poszerza w jakimś sensie przestrzeń matematyki, czy nie? Pojawia się tu też oczywiście problem epistemologiczny, a mianowicie, czy matematyka posługująca się komputerem jest dalej nauką aprioryczną, czy też staje się quasi-empiryczna, a może nawet wręcz empiryczna? Ale to już inny problem i inna opowieść...