II. RECENZJE I NOTY

Piotr Zarzycki, *Modelowanie pojęć matematycznych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2019, ss. 176

W 2019 roku nakładem Wydawnictwa Uniwersytetu Gdańskiego ukazała się monografia Piotra Zarzyckiego, zatytułowana *Modelowanie pojęć matematycznych*, składająca się z czterech rozdziałów poprzedzonych wstępem. Pierwszy dotyczy pojęcia liczb, drugi – mierzenia, trzeci – funkcji, a czwarty – prawdopodobieństwa.

Przywołane pojęcia matematyczne prezentowane są w monografii równolegle w dwóch perspektywach: szkolnej oraz matematycznej, co, jak autor podkreśla we wstępie, powiązane jest z tym, że adresatami tej monografii są nauczyciele matematyki i studenci kierunków nauczycielskich oraz wykładowcy uczelni realizujących dydaktykę w zakresie zagadnień matematycznych. Dodam, że publikacja ta znajdzie uznanie także wśród osób zainteresowanych kształceniem w zakresie metodologii badań i statystyki. Szereg pojęć z obszaru tych dziedzin wiedzy ma oczywisty rodowód matematyczny lub logiczny. Co więcej, przyjęty w monografii tryb prezentacji treści podpowiada kolejność działań prowadzących do powstania i rozwinięcia pojęć kluczowych w metodologii badań.

Interesującym rozwiązaniem przyjętym w prezentowanej monografii jest czynienie odwołań do intuicyjności „przed-szkolnych" pojęć. Autor podjął przy tym wysiłek przeglądu podręczników do matematyki, także zagranicznych, przewidzianych na różnych szczeblach edukacji. Wysiłek ten zasługuje na uznanie, gdyż dostarcza poszerzonego materiału do rekonstrukcji szkolnych sposobów i treści modelowania pojęć matematycznych. Opisy i definicje zawarte w tych podręcznikach porównywane są z formalną wykładnią pojęć matematycznych, co pozwala śledzić kierunek i jakość odchyleń treści podręcznikowych. Autor zamieszcza też szereg cennych wskazówek dydaktycznych. Ma zresztą ku temu słuszne podstawy jako wieloletni dydaktyk matematyki w szkolnictwie podstawowym oraz w szkolnictwie wyższym.

Atrakcyjność monografii podnoszą uwagi Autora dotyczące podstawy programowej z matematyki oraz wprowadzanych do niej przekształceń. Ponadto, każdy rozdział zakończony jest propozycją zadań, które zalecane są do wykonania czytelnikowi, jak też jako propozycje do projektowania ćwiczeń dla uczniów i studentów. W grupie zadań znajdują się także bezpośrednie odesłania do literatury krajowej i zagranicznej w celu rozszerzenia lektury prezentowanych zagadnień. Co więcej, Autor przywołuje wyniki ankiet, które prowadził wśród swoich studentów przed wprowadzeniem tematów realizowanych zajęć dydaktycznych, co dostarcza ilustracji pojęć, jakimi dysponują dorosłe osoby przed odbyciem akademickiego kursu z matematyki.

W projekcie modelowania pojęć matematycznych Autor korzysta z dobrze znanej w pedagogice koncepcji kształtowania się struktur poznawczych Jerome'ego Brunera. Koncepcja ta przewiduje powstawanie reprezentacji poznawczych, w toku współdziałania trzech systemów: enaktywnego, ikonicznego oraz symbolicznego. W pierwszym dominuje nabywanie wiedzy przez wykonywanie aktywności, tj. operacji fizycznych na obiektach, w drugim powstawanie reprezentacji umysłowych o określonej denotacji, w trzecim operowanie symbolami, tj. zmiennymi umożliwiającymi realizację operacji symbolicznych niezależnie od konkretnych obiektów, które tymi symbolami mogą być oznaczane. Temu modelowi kształtowania się reprezentacji umysłowych Autor przyporządkowuje system definicji, począwszy od potocznych definicji nazw matematycznych, które bazują na dotychczasowym pozaszkolnym doświadczeniu uczniów, poprzez definicje poglądowe oparte na obserwacji i demonstracjach, do definicji formalnych, czyli takich, które charakteryzują się już wysoką symbolizacją, a przez to zgeneralizowanym zakresem zastosowań.

Rozdział pierwszy monografii *Modelowanie pojęć matematycznych* poświęcony został liczbom. Uwagę czytelnika zwrócić może oczywiste, choć zarazem niezwykle użyteczne, modelowanie pojęcia liczby za pomocą *continuum*. Ma ono wprawdzie zasadnicze zastosowanie w przypadku liczb rzeczywistych, co Autor akcentuje, ale zarazem ułatwia odróżnianie tych liczb od liczb zespolonych oraz funkcji. Ten geometryczny zabieg nie należy do wyjątków w recenzowanej monografii. Liczne przykłady graficzne podnoszą walor dydaktyczny i poznawczy całej monografii. W rozdziale o liczbach zaakcentowane zostało rozróżnienie kardynalnego i porządkowego aspektu liczby. To pierwsze, ułatwia określenie różnic pomiędzy liczbami całkowitymi i wymiernymi, to drugie, znajduje zastosowanie w przybliżaniu, także studentom kierunków niematematycznych, idei mocy zbiorów, z jaką ci spotykać się mogą na zajęciach ze statystyki lub metodologii badań. Rozdział ten zawiera także opis użytecznych rozwiązań dydaktycznych, pomocnych w kształtowaniu takich m.in. pojęć, jak współmierność, stosunek części do całości i proporcje, które znajdują reprezentację właśnie w liczbach. Cenne są też podpowiedzi dydaktyczne przybliżające działania na liczbach ujemnych, rozwinięcie dziesiętne liczby i jego okresowość, czy też zagadnienie liczb zespolonych, w tym ich gausowskie ujęcie jako par liczb mające przecież fundamentalne konsekwencje dla algebry i geometrii.

Rozdział drugi poświęcony jest mierzeniu. Podobnie jak w rozdziale poprzednim, także i tu przybliżone zostają intuicyjne, poglądowe oraz formalne pojęcia matematyczne. Uwaga skoncentrowana jest jednak na trzech podstawowych zagadnieniach szkolnych związanych z miarą, tj. długości, polu oraz objętości. Warto zauważyć, że każde z tych zagadnień przygotowuje podstawę dla pojęcia wielowymiarowości, którym tak chętnie operuje się również w pedagogice.

Opis i przykłady zawarte w tym rozdziale przybliżają formalne pojęcia związane z miarą. Unaoczniają też kwestie stanowiące podstawę matematycznego myślenia, jak na przykład ta, że jednostka miary, poza tym że jest kluczowa w procesie mierzenia, to jest przede wszystkim konstruktem zależnym od możliwości użytkownika oraz oczekiwanej dokładności pomiaru. W związku z tym i ona musi podlegać racjonalnym regułom.

W omawianym rozdziale Autor zauważa braki w podręcznikowym uzasadnieniu uogólniania formuł matematycznych wykorzystywanych w mierzeniu. Zwykle bowiem, jak akcentuje, podręcznikowa wykładnia ogranicza się do miar w liczbach całkowitych, podczas gdy w prosty graficzny sposób można zabezpieczyć ewentualną niejasność powstającą w przypadku liczb niecałkowitych.

W treści tego rozdziału daje się też zauważyć utyskiwanie na ogólniejszą kwestię. Chodzi o uchybienia w zakresie korzystania z nazw podczas rozwijania pojęć matematycznych u uczniów. Dotyczy to na przykład oznaczania figury geometrycznej jednostką jej miary, czy mylenia kategorii logicznych polegającego na utożsamianiu obiektów geometrycznych ze zbiorami liczb będącymi ich reprezentacjami. Trudno przecenić czynione w tym zakresie uwagi Autora, gdyż poprawność językowa ma znaczenie dla powodzenia nie tylko procesu dydaktycznego, ale także dla adekwatnego posługiwania się pojęciami i minimalizowania ryzyka tzw. mylenia mapy z terytorium.

Te i inne uwagi czynione w tym rozdziale mogą mieć zastosowanie również w dydaktyce akademickiej. Tak jest w odniesieniu do zagadnień pomiaru i miary, jak również niedomiaru i nadmiaru. Warto też zauważyć, że to co w zakresie pojęciowym wydaje się banalne, może nieść ważne konsekwencje. Tak jest z poprawnym matematycznie pojęciem długości, które bardzo się przydaje w rozwijaniu racjonalnego pojęcia regresji nieliniowej i korelacji nieliniowej.

Rozdział trzeci poświęcony jest modelowaniu pojęcia funkcji, jej geometrycznych i algebraicznych reprezentacjach oraz istocie wyrażającej się w przyporządkowaniu elementów jednego zbioru elementom drugiego zbioru. Takie z kolei pojęcia, jak: zależność wartości jednej zmiennej od wartości innej, zmienność wartości jednej wielkości zachodząca wraz ze zmianą wartości drugiej wielkości są szczególnie popularne w środowisku osób prowadzących badania obserwacyjne lub przygotowujących się do nich. Mimo to, nieostrożne byłoby przyjmowanie, że każdemu ich użyciu towarzyszy świadomość nawiązywania do zagadnienia funkcji i zbiorów. Słusznie jest więc sięgnąć do trzeciego rozdziału, gdyż oferuje on zarys podstawy wykładni szkolnej i propozycje środków rozwijających przywołane pojęcia. Wśród proponowanych rozwiązań zaakcentowane zostały wykresy, grafy oraz tabele. Okazują się one pomocne w budowaniu podstawy umiejętności symbolizowania funkcji i wprowadzeniu jej algebraicznej postaci.

Funkcja, jej własności, ciągłość i różniczkowalność, to zdecydowanie podstawowe pojęcia matematyczne w modelowaniu procesów oraz ich dynamiki. Są niezbywalne również tam, gdzie próbuje się tworzyć reprezentacje jakichś wielkości. W związku z tym, korzystają z nich również studenci kierunków społecznych, kiedy mają do czynienia z teoriami pomiaru. Co więcej, pojęcia funkcji, jej ciągłości, granicy, zbieżności i wreszcie całki wchodzą w skład podstawowej terminologii wykorzystywanej w toku nauczania teorii prawdopodobieństwa, z którą zaznajamiani są również studenci kierunków, na których naucza się statystyki.

Warto odnotować, że w rozdziale trzecim zwrócona została uwaga na towarzyszące rozwijaniu pojęcia funkcji kształtowanie się pojęć relacji, odwzorowywania i przekształcenia. Te z kolei służą nie tylko dalszemu nabywaniu wiedzy i umiejętności przewidzianych programem podstawowego wykształcenia w zakresie matematyki, ale także mogą być niezbędne w samodzielnym budowaniu racjonalnych konstrukcji myślowych, tworzeniu symbolizacji, czy w rozumieniu języka badań empirycznych.

Na osobną uwagę zasługuje idea zmiennej, którą, co oczywiste, również przedstawiono w omawianym rozdziale. Uczyniono to bez zbędnej narośli skojarzeń, jakie nierzadko przylegają do nazwy „zmienna". Została ona wprost zidentyfikowana z symbolizacją, co ułatwia uzmysłowienie sobie lub uczniom, że przydaje się nie tylko tam, gdzie zachodzi potrzeba sięgania po arytmetykę. Wprawdzie warunkiem rozumienia tej nazwy jest decentracja, ale to osiągnięcie poznawcze zazwyczaj towarzyszy już uczniom szkoły podstawowej.

W rozdziale o funkcjach Autor poświęca też uwagę zagadnieniom pominiętym w podstawie programowej z matematyki z roku 2017. Mowa między innymi o różnowartościowości funkcji oraz o funkcji odwrotnej. Podobnie zresztą jest ze wspomnianymi już całkami, dla których w monografii *Modelowanie pojęć matematycznych* przewidziany został cały podrozdział. Autor rekomenduje przy tym nauczanie całek pomimo braku dla nich miejsca w podstawie programowej, a jako powód podaje ich podstawowe znaczenie w obliczeniach dotyczących funkcji. Interesującym elementem rozdziału trzeciego jest zestawienie tych treści, które w zakresie jednej z funkcji elementarnych są przedmiotem dawnych i obecnych podręczników szkolnych. Ponadto, Autor zaprezentował w tym rozdziale ćwiczenia z wykorzystaniem aplikacji GeoGebra i Mathematica, popularnych instrumentów informatycznych w uczeniu się i nauczaniu matematyki, oraz podał propozycje rozwiązań dydaktycznych zwiększających efektywność pojmowania funkcji, jej nieciągłości, ciągłości oraz pochodnej.

Rozdział czwarty poświęcony został prawdopodobieństwu. Na jego wstępie Autor zauważa, że zgodnie z podstawą programową nauczanie prawdopodobieństwa i kombinatoryki przesunięte zostało do programu nauczania matematyki w szkole średniej. To zjawisko powinno niepokoić przynajmniej z tego powodu, że intuicje związane z szacowaniem niepewności – o tym przecież traktuje teoria prawdopodobieństwa – pojawiają się znacznie wcześniej w rozwoju poznawczym, niż ten odpowiadający wiekowi życia uczniów szkoły średniej, i co warto byłoby odpowiednio wcześnie wykorzystać. Marginalizowanie tych intuicji w nauczaniu matematyki skutkuje trudnościami w opanowywaniu istoty prawdopodobieństwa i podstaw racjonalnego myślenia. Oprócz propozycji ćwiczeń rozdział zawiera propozycje zajęć, w tym zajęć wprowadzających na poziomie szkoły podstawowej. Ponadto, Autor zamieszcza tu charakterystykę czterech koncepcji rozkładu materiału nauczania rachunku prawdopodobieństwa. Jedną z nich stanowi jego autorska. To niezwykle cenne dla każdego, kto jest zainteresowany projektowaniem uczenia się i nauczania tego działu matematyki, nie tylko w szkole średniej. Trudno nawet sobie wyobrazić, by programy studiów na kierunkach niematematycznych uwzględniające zajęcia ze statystyki mogły być efektywnie realizowane w zakresie tematów poświęconych wnioskowaniu statystycznemu bez solidnej podstawy z teorii prawdopodobieństwa. Autor monografii zdaje sobie sprawę z powagi przeszkody, jaką jest strach przed tym działem matematyki, dlatego we własnej koncepcji zajęć zaleca położenie nacisku na symulacje i doświadczenia, które poza tym, że działają oswajająco, pozwalają też pozbywać się błędnych intuicji, którymi skutkuje potoczne pojęcie prawdopodobieństwa. W rozdziale zaprezentowane zostały przykłady doświadczeń, w tym intrygujące zadanie Comte de Buffona z igłą rzucaną na płaszczyznę pokrytą równoległymi prostymi. Do prowadzenia symulacji Autor zaleca korzystanie z takich pomocy, jak przywołane już aplikacje GeoGebra, Mathematica, a poza nimi, Derive i Maple. Wiadomo jednak, że w zasięgu są również kalkulatory dostępne w innych aplikacjach, jak też program Excel z pakietu MS Office. Jeśli chodzi o treści nauczania, to narracja rozdziału czwartego prowadzona jest od klasycznej i frekwencyjnej, przez aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa, do koncepcji prawdopodobieństwa warunkowego. Wyraźnie też zaakcentowana została w tym rozdziale rola kombinatoryki w rozwijaniu symbolicznej reprezentacji prawdopodobieństwa.

Na tle publikacji poświęconych dydaktyce matematyki, prezentowana monografia wyróżnia się zakresem zagadnień, profilem ich ujęcia oraz formułą prezentacji. Wprawdzie brakuje jasnej informacji na temat klucza doboru pojęć, które są przedmiotem poszczególnych rozdziałów monografii, to jednak z powodów, o których pisałem wyżej, publikację tę trudno przecenić. Swoją drogą, może ona posłużyć za wzorzec publikacji poświęconych innym pojęciom matematycznym. Piotr Zarzycki zaprezentowaną tu monografią upomina się o fundament wiedzy matematycznej i matematycznego myślenia, będący warunkiem koniecznym rozumnego użytkowania terminów, za którymi stoją pojęcia matematyczne. Jestem przekonany, że bez spełnienia tego warunku komunikacja, także w środowiskach naukowców i profesjonalistów zajmujących się zagadnieniami kształcenia, edukacji i badań w tym zakresie, zagrożona jest nieporozumieniami oraz miałkością dyskusji, a w dalszej kolejności gubieniem horyzontu możliwych działań i ich efektów.

Sławomir Pasikowski
ORCID 0000-0002-0768-1596