Kinga Kolczyńska-Przybycień
ORCID 0000-0002-9387-2769

Zespół Szkół im. Jadwigi i Władysława Zamoyskich w Rokietnicy

O BŁĘDACH I ICH ZNACZENIU W ROZUMOWANIACH MATEMATYCZNYCH

Abstract. Kolczyńska-Przybycień Kinga, *O błędach i ich znaczeniu w rozumowaniach matematycznych* [On Errors and Their Importance in Mathematical Reasoning]. Studia Edukacyjne no. 64, 2022, Poznań 2022, pp. 75-88. Adam Mickiewicz University Press. ISSN 1233-6688. DOI: 10.14746/se.2022.64.6.

In this article we discuss selected types of errors in mathematical thinking. We present their causes, some consequences and the possibilities of using this erroneous reasoning for didactic purposes.

Key words: errors in mathematical reasoning, types of mathematical errors, use of mathematical errors

Działalność człowieka jest ściśle związana z błędami popełnianymi w jej toku. Jakkolwiek staralibyśmy się ich uniknąć, to i tak nie będziemy w stanie zupełnie ich wyeliminować, gdyż nikt z nas nie jest idealny. Chociaż błędy ze swej natury są bytami pejoratywnymi, to często niosą ze sobą pozytywne konsekwencje. Spróbujmy na wstępie zdefiniować samo pojęcie błędu, co w ogólności jest trudne do określenia i najczęściej porównywane z pojęciami prawdy i fałszu. *Encyklopedia powszechna PWN* błąd definiuje jako niezgodność między rzeczywistością a wyobrażeniem o niej. Gdybyśmy chcieli skoncentrować swą uwagę na błędach popełnianych w matematyce, to najistotniejsze są błędy natury logicznej, zaś w logice błąd rozumiany jest jako pomyłka przy wnioskowaniu, czego konsekwencję stanowi fakt, że wniosek nie wynika logicznie z przesłanek, nawet jeśli są one prawdziwe. Często jednak błędy w matematyce kojarzone są przez ogół z nieprawidłowo wykonanymi obliczeniami, czy też ich częścią, co w istocie stanowi tylko jeden z rodzajów błędów.

Samo znalezienie, czy też poprawienie, błędu ma naturę pozytywną i często może prowadzić do rozwoju lub nawet odkrycia czegoś nowego. Znanych jest mnóstwo przykładów z historii nauki, gdzie nieprawdziwe teorie bądź wyobrażenia były systematycznie obalane i wypierane przez nowe, bardziej wiarygodne, co stanowi istotę rozwoju nauki. Klasycznym tego przykładem jest teoria geocentryczna, wyparta przez Mikołaja Kopernika teorią heliocentryczną. Co oczywiste, próba wyjaśnienia zasady ruchu ciał niebieskich przyczyniła się do rozwoju astronomii i w konsekwencji powstania teorii heliocentrycznej. Tak więc, paradoksalnie powstanie jakiejkolwiek (w tym przypadku błędnej teorii geocentrycznej) dotyczącej ruchu ciał niebieskich przyczyniło się do rozwoju nauki i w konsekwencji poznania prawdy pisanej poprzez teorię heliocentryczną. Bo w nauce najważniejsze jest pytanie „dlaczego?" i próba odpowiedzenia na nie. Celem tego artykułu nie jest propagowanie popełniania błędów, czy ich gloryfikacja, lecz zwrócenie uwagi na to, że często błędne (tzn. nie do końca prawdziwe) rozumowania mogą zawierać ciekawe pomysły bądź stać się inspiracją do nich.

Trzeba zdać sobie sprawę, że matematyka jest nauką ścisłą, w której precyzyjnie określone są: język i reguły wnioskowania, którymi można się posługiwać. Dowód jakiejś tezy w matematyce polega zatem na otrzymaniu tej tezy z wcześniej udowodnionych już tez, bądź zdań uznanych za prawdziwe (tzw. aksjomatów), za pomocą dopuszczalnych reguł wnioskowania. W matematyce możemy wyróżnić wiele metod dowodzenia, między innymi dowodzenie „wprost". Ten rodzaj dowodu stanowi ciąg formuł (zdań) danej teorii, kończący się zdaniem, którego dowodzimy, a kolejne formuły w dowodzie albo wynikają logicznie z poprzednich, albo też są aksjomatami. Inną z kolei metodą dowodzenia twierdzeń matematycznych jest metoda „nie wprost". Ten rodzaj dowodu rozpoczynamy od przypuszczenia, że dowodzone twierdzenie jest fałszywe i udowodnieniu, że przypuszczenie takie prowadzi do sprzeczności[1]. Należy jednak zwrócić uwagę, że w gruncie rzeczy dowód ma charakter psychologiczny i tak naprawdę polega na przekonaniu o jego prawdziwości. Dlatego, może się zdarzyć, i niejednokrotnie się zdarza, że dowody w matematyce zawierają błędy bądź luki. To znaczy, twierdzenia zostają uznane przez jakiś czas za prawdziwe, w gruncie rzeczy nie posiadając pełnego czy też poprawnego dowodu. Jest to więc sytuacja, w której osoby sprawdzające poprawność tego dowodu zostały przekonane co do jego prawdziwości, choć w rzeczywistości nie mógł on być w pełni przekonujący. Wynika to często z faktu, że dowody matematyczne bywają bardzo skomplikowane, a pomysły autorów tych dowodów

[1] I. Bondecka-Krzykowska, *O dowodzeniu twierdzeń*, Poznański Portal Matematyczny, https://matematyka.poznan.pl/artykul/o-dowodzeniu-twierdzen/, [dostęp: 10.02.2022].

czasem bardzo abstrakcyjne. Stąd, zdarzają się tego typu pomyłki. Znany i ceniony matematyk Bertrand Russel określił żartobliwie matematykę jako naukę, w której nigdy nie wiemy o czym mówimy i czy to o czym mówimy jest prawdą: „Matematykę można zdefiniować jako przedmiot, w którym nigdy nie wiadomo, o czym się mówi, ani, czy to, o czym się mówi, jest prawdziwe". Dobrym przykładem może być tutaj błąd popełniony przez Henri Lebesguea w 1905 roku, który opublikował fałszywą własność, że rzut borelowskiego podzbioru płaszczyzny na prostą jest zbiorem borelowskim. Znalezienie tego błędu przez Michaiła Suslina w 1917 roku przyczyniło się do powstania opisowej teorii mnogości. Podobnie Augustin Louis Cauchy opublikował fałszywe twierdzenie, że punktowa granica zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest zawsze funkcją ciągłą. Joseph Fourier i Niels Henrik Abel znaleźli kontrprzykłady na prawdziwość tego twierdzenia, a z kolei Peter Dirichlet zauważył, że można zbieżność punktową zastąpić zbieżnością jednostajną[2], co przyczyniło się do powstania prawdziwego już twierdzenia dotyczącego zbieżności[3]. Należy podkreślić, że wszyscy wyżej wymienieni matematycy to wybitne postacie tej dziedziny, a błąd w tych przykładach przyczynił się do rozwoju matematyki. Z kolei Man Keung Siu w artykule zatytułowanym „Czy matematyka = dowód?" przypomina o innych zaistniałych faktach:

– w 1945 roku „Times" podał sensacyjną wiadomość, że amerykański matematyk Hans Rademacher znalazł dowód jednej z najsłynniejszych hipotez – hipotezy Riemanna;

– wiosną 1986 roku „New York Times" ogłosił z kolei, że angielski matematyk Rourke i Portugalczyk Rego udowodnili inną słynną hipotezę – hipotezę Poincarego;

– marcowy numer „Newsweeka" z 1988 roku doniósł natomiast, że Japończyk Miyaoka ostatecznie rozstrzygnął prawdziwość wielkiego twierdzenia Fermata (a naprawdę udowodnionego dopiero w roku 1995 przez Wilesa i Taylora)[4].

Wszystkie powyższe „dowody" były wadliwe. Dlatego, nie należy ufać natychmiast podanym wiadomościom o rzekomych dowodach. Sam H. Steinhaus podkreślał, że wiele pism matematycznych obfituje w błędy, a wspomniawszy jednego z wybitnych matematyków jemu współczesnych wyraził zdanie, że połowa tych twierdzeń, które pojawiają się w 600 fachowych pe-

[2] Zbieżność punktowa, https://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_convergence#History, [dostęp: 11.02.2022].

[3] Zbieżność jednostajna, https://mathoverflow.net/questions/879/most-interesting-mathematics-mistake, [dostęp: 11.02.2022].

[4] M.K. Siu, *Mathematiques = Demonstration?*, Bulletin, 2001, 434.

riodykach matematycznych, jest błędna[5]. Błędne dowody trafiały i trafiają się również w podręcznikach szkolnych. Dobrym przykładem może być tutaj zaproponowany przez Adrien-Marie Legendre'a „dowód" piątego postulatu Euklidesa, czyli jeden z wielu pozornych dowodów tego faktu, który przez dwadzieścia lat powtarzano w podręczniku tego autora (także tłumaczonych na język polski) i innych. Ilu zatem uczniów w XIX-wiecznej Europie musiało się go nauczyć?[6]. Jakkolwiek sama próba jego udowodnienia również przyczyniła się do rozwoju matematyki, gdyż była źródłem powstania geometrii nieeuklidesowych.

W literaturze istnieje wiele podziałów błędów. Te związane z matematyką mogą dotyczyć nauczania matematyki, inne jej uczenia się, jeszcze inne są ściśle związane z rozumowaniami matematycznymi i wnioskowaniem. Jak podkreśla M. Ciosek, klasyfikowanie błędów stanowi zadanie trudne, między innymi ze względu na ogromną ich rozmaitość oraz możliwość wieloaspektowego spojrzenia na nie. Zwraca również uwagę na fakt, że niektórzy dydaktycy uważają nawet, że podejmowanie prób klasyfikowania błędów jest niecelowe, gdyż z góry skazane na niepowodzenie[7]. Wspomniana autorka publikacji przedstawia wybrane z literatury dydaktycznej podziały błędów wychodzące poza błędy arytmetyczne, ale ograniczone do pewnych ich grup, wyróżnionych ze względu na to, czy dotyczą definicji, twierdzenia, czy ogólniej – metody matematycznej. Oto zalicza do nich na przykład typy błędów w:

– definiowaniu (Krygowska, Straszewicz, Kulczycki, 1959);
– rozumieniu twierdzenia (Turnau, 1971; Nowecki, 1978);
– rozumieniu związków między twierdzeniem a jego dowodem (Nowecki, 1978).

Anna Zofia Krygowska podkreśla wagę uwzględniania charakteru matematyki w analizie błędów i sugeruje, aby zwracać uwagę na kilka elementów, jak: (1) matematyka jako przedmiot nauczania zachowuje swą organizację wewnętrzną, czyli pojęciowo jest to dziedzina zorganizowana przez samą siebie tak, że drobna luka w rozumieniu lub wiedzy łatwo może doprowadzić do powstawania nieporozumień i błędów; (2) aktywność matematyczna wymaga szczególnej uwagi, autokontroli; (3) język matematyki na każdym poziomie uczenia się może stać się powodem do powstania nieporozumień i niesie niebezpieczeństwo oderwania tego języka od jego semantycznych znaczeń; (4) proces nauczania-uczenia się matematyki wymaga przezwy-

[5] H. Steinhaus, *Błędy w matematyce*, Wiadomości Matematyczne, 1969, XI, Seria II, s. 101.

[6] S. Turnau, *O dowodzeniu twierdzeń we współczesnej szkole*, https://matematyka.up.krakow.pl/konfer/dydaktyka/dm23/turnau.htm, [dostęp: 11.02.2022].

[7] M. Ciosek, *Błędy popełniane przez uczących się matematyki i ich hipotetyczne przyczyny*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, 1992, 13, 01, s. 69-70.

ciężenia różnych sprzeczności, na przykład przeciwstawiającej konieczność automatycznego opanowania algorytmów, konieczności stałego rozwoju myślenia niealgorytmicznego, czy też określając ogólniej: która przeciwstawia sprawność w stosowaniu procedur jasnej świadomości faktów; (5) proces nauczania-uczenia się matematyki ma swoje głębokie źródła w różnych rzeczywistościach życia i działania ucznia: biologicznej, fizycznej, ekonomicznej i tym podobne. Od nich wychodzi się i powraca. Rzeczywistości te łączą się i przenikają. Procesowi uczenia się matematyki towarzyszy przechodzenie z jednej rzeczywistości matematycznej do innej, z pokonywaniem mniej lub bardziej trudnych progów pojęciowych[8].

Obok rozważań o charakterze ogólnym, dydaktycy podejmują się również głębszej analizy błędów związanych z jakimś działem matematyki szkolnej albo pojedynczym pojęciem czy umiejętnością. Na przykład, A.Z. Krygowska zajmowała się błędami popełnianymi przez uczniów w rachunku algebraicznym, jak również poświęciła swój czas błędom odnoszącym się do geometrii. Z kolei, S. Turnau, H. Siwek, J. Adda zajmowali się analizą błędów z zakresu logiki[9]. W dydaktyce matematyki funkcjonuje również pojęcie tak zwanego błędu błogosławionego, utworzone przez A.Z. Krygowską, które oznacza rodzaj błędu użytego do pozytywnych celów dydaktycznych[10]. Błędy popełniane przez uczniów w matematyce są zjawiskiem bardzo wartościowym. Uczniowski błąd tworzy bowiem bardzo dobrą sytuację dydaktyczną, która może stać się początkiem ciągu kształtujących rozumowań. Można także wykorzystać go jako punkt wyjścia do badań, analiz, czy wnioskowania[11], a nawet może prowadzić do odkrywania nowych definicji lub faktów i twierdzeń matematycznych[12].

W dalszej części niniejszego artykułu zostanie przedstawiona analiza przykładowych błędnych rozumowań, zarówno uczniowskich, jak również zawodowych matematyków, która może dać początek: kształtującemu rozumowaniu, odkrywaniu nowych faktów, a także pewnym refleksjom dotyczącym nauczania matematyki. Podane zostaną również przykłady takich błędnych rozumowań, których nie da się naprawić.

Rozważmy więc następujące zadanie:

[8] A. Z. Krygowska, *Comprendre l'erreur en metématiques*, [w:] *Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique*, les Éditions de l'Université de Sherbrooke, s. 12-16 (polskie tłumaczenie w Dydaktyce Matematyki 10).

[9] M. Ciosek, *Błędy popełniane przez uczących się*, s. 74.

[10] Błogosławiony błąd – definicja, https://pl.wikipedia.org/wiki/Błogosławiony_błąd#cite_note-kiosk-4, [dostęp: 12.02.2022].

[11] A. Orzeszek, *Wykorzystać niezaplanowane sytuacje*, Nauczanie Matematyki, 2007, 8, s. 459–463.

[12] M. Legutko, *O podręczniku matematyki*, Dydaktyka Matematyki, 1992, 23.

Zadanie 1[13]

Rozwiąż w liczbach całkowitych następujące równanie:

$$x^2 - y^2 = 2y + 102$$

Uczeń rozwiązując to zadanie, sprowadza powyższe równanie do postaci:

$$x^2 - (y + 1)^2 = 101,$$

czyli:

$$(x - y - 1)(x + y + 1) = 101,$$

po czym dochodzi do wniosku, że muszą być spełnione jednocześnie układy równań:

$$\begin{cases} (x - y - 1) = \pm 1 \\ (x + y + 1) = \pm 101, \end{cases}$$

a następnie błędnie rozwiązuje powyższy układ równań bądź nie potrafi go rozwiązać. Wówczas tenże uczeń pokonuje największą trudność tego zadania, nie uzyskując przy tym wcale rozwiązania, bądź otrzymując błędny wynik. Jednakże wykazuje się on dużą pomysłowością, sprowadzając równanie drugiego stopnia do prostego w zasadzie układu równań i dobry nauczyciel matematyki powinien dostrzec potencjał w takim uczniu, mimo że może on uzyskiwać słabe oceny, bowiem często rozwiązania zadań, które nie zawierają w pełni poprawnego wyniku końcowego, nie są uznawane za rozwiązane.

Inny uczeń rozwiązując w liczbach całkowitych podobne równanie, mianowicie

$$x^2 = 101 - (y + 1)^2,$$

zauważa, że wystarczy rozwiązać skończoną liczbę równań postaci

$$x^2 = k, \quad (y + 1)^2 = 101 - k$$

gdzie $k = 0,1 \ldots, 101$.

Oczywiście, w sytuacjach ograniczenia czasowego nie będzie on w stanie rozważyć tych wszystkich przypadków, aczkolwiek i taki uczeń wykazuje się dużą pomysłowością, gdyż sprowadza to równanie do skończonej liczby dość trywialnych równań. Łatwo sobie wyobrazić, że i taki uczeń nie będzie uzyskiwał wysokich not na sprawdzianach, testach, czy egzaminach,

[13] Opracowanie własne.

choć i w tym uczniu drzemie duży potencjał, gdyż potrafi sprowadzić dość skomplikowane równanie do prostych równań. Powyższy przykład powinien wskazywać, że niejednokrotnie w błędnych bądź niepełnych rozwiązaniach znajdują się dobre pomysły i wprawny nauczyciel powinien potrafić to docenić, a nie tylko zwracać uwagę na poprawne wykonywanie algorytmów, tym bardziej że z punktu widzenia czystej matematyki ich umiejętność nie odgrywa istotniej roli. Przyczyną tego, że często uzdolnieni matematycznie uczniowie nie są dostrzegani w szkole jest błędnie wykreowany wizerunek ucznia zdolnego, jako ucznia perfekcyjnie i szybko wykonującego pewne algorytmiczne zadania.

Innym rodzajem błędu, który można zaliczyć do typu błędów błogosławionych jest błąd powstający w wyniku niewłaściwego zastosowania pewnych wzorów czy reguł matematycznych. Na przykład, uczniowie często obliczają w błędny sposób pierwiastek z sumy liczby, stosując nieprawdziwą formułę:

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Tę błędną formułę można wykorzystać do pokazania uczniom, że nie jest ona prawdziwa dla wszystkich liczb, lecz tylko dla niektórych, rozwiązując w tym celu powyższe równanie. Aby je rozwiązać, wystarczy obydwie strony tego równania podnieść do kwadratu i po redukcji wyrazów podobnych dojść do wniosku, że wzór powyższy jest prawdziwy tylko w przypadku, kiedy liczby x, y są nieujemne i jedna z nich równa się zero. Takie podejście powinno unaocznić uczniom, że powyższej formuły nie wolno stosować dla dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych x, y. Powyższy błąd może stać się również punktem wyjścia do próby odpowiedzenia sobie na inne, równie ważne, pytanie. Otóż, oznaczając przez

$$f(x) = \sqrt{x}$$

powyższa formuła przyjmuje postać:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

i możemy zapytać, dla jakich funkcji $f \sqrt{x}$ jest ona prawdziwa. Na podstawie poprzednio przedstawionego rozumowania można z pewnością stwierdzić, że nie jest ona prawdziwa dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$. Nakładając pewne ograniczenia na funkcję f (np. ciągłość), można pokazać, że powyższa formuła jest tylko prawdziwa dla funkcji $f(x) = ax$, a dowód tego faktu nie wymaga wiedzy matematycznej, większej niż wymagana jest w szkole średniej. Uczeń po przedstawieniu takiego rozumowania przekona się, że nie można powyższej formuły stosować do funkcji innej niż liniowa, co więcej – w przypadku funkcji liniowej powyższa formuła zamienia się w prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania.

Rozważmy inną sytuację. Mianowicie, student ma za zadanie wyznaczyć ilość liczb naturalnych, mniejszych od n i względnie pierwszych z n. Zauważa on, że ilość liczb względnie pierwszych z iloczynem kl liczb względnie pierwszych k i l jest równa iloczynowi ilości liczb względnie pierwszych z liczbą k oraz ilości liczb względnie pierwszych z liczbą l. Następnie zauważa, że ilość liczb względnie pierwszych z liczbą pierwszą p wynosi $p - 1$. Po czym, znając fakt, że każda liczba naturalna da się przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych

$$n = p_1 p_2 \dots p_n$$

dochodzi do wniosku, że ilość liczb względnie pierwszych z liczbą n i nie większych od niej wynosi:

$$(p_1 - 1)\ (p_2 - 1)\ \dots\ (p_n - 1).$$

Wzór ten jest oczywiście błędny, gdyż nie wszystkie p_i muszą być różne między sobą. A co za tym idzie, nie muszą być ze sobą względnie pierwsze. Aczkolwiek sam pomysł rozwiązania tego zadania jest dobry, gdyż po niewielkiej modyfikacji, która dotyczy wyznaczenia ilości liczb względnie pierwszych z liczbą p^s (p to liczba pierwsza) i nie większych od niej prowadzi do prawidłowego wyniku. Jest to przykład rozwiązania zadania, w którym cały pomysł rozwiązania jest dobry, błędne natomiast tylko jego wykonanie. Ten rozdaj błędu można by nazwać „usterką" w rozumowaniu matematycznym, gdyż jej usunięcie nie zmienia toku rozumowania i opiera się na pierwotnym pomyśle dowodu. Gdyby rozumowanie to dotyczyło nieznanego jeszcze twierdzenia, to osoba, która usunęłaby ową usterkę stałaby się przy niewielkim nakładzie pracy autorem dowodu.

W matematyce zdarzają się również rozumowania, których nie da się poprawić, gdyż przedstawiają pozorne „dowody" fałszywych twierdzeń. Gdyby ktoś próbował udowodnić, że niemożliwe jest rozbicie (czyli rozłożenie na sumę mnogościową rozłącznych między sobą podzbiorów) kuli na skończoną liczbę podzbiorów, a następnie wykorzystując przesunięcie i obroty złożenie dwóch takich samych kul, mógłby rozumować następująco: skoro obrót i translacja nie zmienią miary zbioru oraz miara sumy rozłącznych zbiorów jest równa sumie miar tych zbiorów, zatem jest to niemożliwe, gdyż wówczas miara kuli byłaby równa swojej podwojonej mierze. Może to zachodzić tylko wówczas, kiedy miara kuli równałaby się zero. Rozumowanie to wydaje się pozornie prawdziwe, lecz takie nie jest, gdyż S. Banach i A. Tarski udowodnili, że takie rozbicie istnieje[14]. Błąd, jaki popełniamy w powyższym rozumowaniu polega na tym, że milcząco zakładamy, że wszystkie podzbiory przestrzeni są mierzalne, co jest nieprawdą. Przyczyny tego błędu można by szukać w tym, że często pozornie proste pojęcia, takie jak na przykład miara, związane są z bardzo abstrakcyjnymi bytami.

Przyjrzyjmy się teraz przez chwilę statystykom wyników zadań części korespondencyjnej bieżącej edycji Olimpiady Matematycznej Juniorów[15]. Okazuje się, że najmniej poprawnych rozwiązań dotyczyło zadania 7 i zadania 3[16]. Treść zadania 7 brzmi następująco: „Wybrano n (niekoniecznie różnych) cyfr, z których żadna nie jest równa 0 ani 7. Okazało się, że każda liczba n-cyfrowa zapisana wszystkimi wybranymi cyframi jest podzielna przez 7. Udowodnij, że liczba n jest podzielna przez 6", a z kolei zadania 3 tak: „Niech $n \geq 1$ będzie liczbą całkowitą. Wykaż, że istnieje taka liczba całkowita, która jest większa od $\sqrt{2n}$ i mniejsza od $\sqrt{5n}$ [17]". Wyniki te nie powinny dziwić, gdyż dowodzenie jakichkolwiek nierówności czy podzielności w zbiorze liczb całkowitych jest zupełnie marginalizowane. Większość nauczycieli matematyki nie podejmuje się bowiem dowodzenia nierówności czy dowodzenia podzielności, szczególnie na etapie szkoły podstawowej, a zagadnienie nierówności sprowadza się na ogół do przedstawienia algorytmu rozwiązywania konkretnych nierówności, zaś podzielność co najwyżej do cech podzielności bądź dzielenia z resztą. Możemy więc dostrzec tutaj konsekwencje braku motywacji nauczycieli do przekazania uczniom wiedzy większej, niż ta z zakresu podstawy programowej nauczania matematyki. Co więcej, powyższy brak motywacji ze strony nauczycieli przechodzi na uczniów, dlatego zauważalne jest małe zainteresowanie uczniów w Polsce udziałem w konkursach matematycznych, szczególnie w olimpiadzie. Błędy zdarzają się również w matematycznych publikacjach naukowych, co często wynika z tego, że matematyka na poziomie akademickim jest nauką dość skomplikowaną. Twierdzenia na tym poziomie mają charakter bardzo abstrakcyjny tak, że recenzent takich prac w trakcie ich sprawdzania może coś przeoczyć (np. niespełnienie jakiś założeń twierdzenia, z którego się korzysta, nierozpatrzenie jakiegoś przypadku, czy też luki w rozumowaniu itp.), przez co praca zostaje dopuszczona do druku, choć w rzeczywistości zawiera błędy. Błędy te mogą być dwojakiego rodzaju: jedne z nich da się poprawić, natomiast inne nie. Zatem, często pojawiają się publikacje matematyczne dotyczące błędów w innych pracach,

[14] Paradoks Banacha-Tarskiego – twierdzenie, https://pl.wikipedia.org/wiki/Paradoks_Banacha-Tarskiego, [dostęp: 12.02.2022].

[15] Statystyki cz. korespondencyjnej XVII Olimpiady Matematycznej Juniorów, https://www.omj.edu.pl/uploads/attachments/koresp21.pdf , [dostęp: 12.02.2022].

[16] Tamże.

[17] Zadania cz. korespondencyjnej XVII Olimpiady Matematycznej Juniorów, https://www.omj.edu.pl/uploads/attachments/1etap21.pdf, [dostęp: 12.02.2022].

co stanowi potwierdzenie, że takie błędy bywają popełniane i są inspiracją do badań naukowych. Joseph F. Grcar w publikacji *Errors and Corrections in Mathematics Literature*[18] wskazuje, że ponad 1% prac z matematyki zawiera błędy wymagające poprawek, co stanowi dość znaczną skalę tego zjawiska.

Szukanie błędów nie powinno być zatem uznawane za objaw złośliwości, gdyż nawet najwięksi matematycy błądzili. Nie jest więc hańbą popełnić błąd, a ich znajdywanie i poprawianie oddaje przysługę nauce. Istnieje jeszcze jeden powód, dla którego warto „gromadzić" błędy matematyczne. Ich kolekcja może bowiem stanowić doskonały środek pomocniczy do nauczania matematyki. W. Mnich w pracach: *0 zadaniach na poszukiwanie błędu*[19] oraz *O błędach w rozumowaniach uczniów*[20] przedstawia propozycję zabiegu dydaktycznego, polegającego na tym, że uczniowie analizują błędne rozumowanie w celu wykrycia błędu i wyjaśnienia sobie, na czym on polega, a następnie poprawieniu rozumowania. Powyżej przytoczone prace zawierają bardzo ciekawe i różnorodne przykłady błędnego rozumowania z geometrii i algebry szkolnej. Tenże W. Mnich jeszcze szerzej omawia zagadnienia doboru i wykorzystania zadań na poszukiwanie błędu w jednym z rozdziałów swojej rozprawy doktorskiej[21], gdyż obok zadań na poszukiwanie błędu w rozumowaniu możemy znaleźć tam zadania na poszukiwanie błędu w definicji znanych uczniowi pojęć, jak również na wykrywanie fałszywości twierdzeń, czy też zadania polegające na wykazaniu niepoprawności pewnych analogii. Takie zadania, według autora, nie dość, że mogą pomóc uczniowi w rozumieniu istoty matematycznej, to również mogą przyczynić się do skutecznego posługiwania się elementami tej metody. Inne równie ciekawe przykłady zadań na poszukiwanie błędu, które można wykorzystać w szkole, możemy znaleźć w zbiorze zadań S. Serafina i G. Terlińskiego, zatytułowanych *Zbiór zadań z matematyki elementarnej. Geometria*[22], czy w artykule R. Douady i M.J. Perrin[23], gdzie przedstawiono serie zadań, których rozwiązanie ma zmienić błędne intuicje ucznia odnoszące się do pojęć pola i obwodu figury. Dobry i doświadczony nauczyciel matematyki, który w swej pracy przygląda się uczniowskim błędom w rozumowaniach, po ich skolekcjonowaniu może sam wymyślać zadania, w których celowo popełniono błędy, a zadaniem uczniów jest ich odnalezienie, przeanalizowanie, jak również poprawianie.

[18] J.F. Grcar, *Errors and Corrections in Mathematics Literature*, s. 419, https://www.ams.org/notices/201304/rnoti-p418.pdf, [dostęp: 12.02.2022].

[19] W. Mnich, *O zadaniach na poszukiwanie błędu*, Matematyka, 1978, 2, s. 79-86.

[20] W. Mnich, *O błędach w rozumowaniu uczniów*, Matematyka, 1978, 3, s. 159-165.

[21] W. Mnich, *Aktywności matematyczne jako kryterium doboru zadań w nauczaniu matematyki* (rozprawa doktorska), Kraków 1980, s. 201-238.

[22] S. Serafin, G. Terliński, *Zbiór zadań z matematyki elementarnej. Geometria*, Warszawa 1976; zad. 39, s. 40; zad. 42, s. 40-41; zad. 133, s. 79-80.

[23] R. Douady, M.J. Perrin, *Aires de surfaces planes*, Petit, 1984, X 6, s. 5-33.

Taka nauka na cudzych błędach wymaga bowiem dużego skupienia, zaangażowania, czy rozwagi, dlatego może przynosić znakomite rezultaty. Dzięki niej uczniowie mogą skutecznie utrwalić swoją wiedzę, ale także nauczyć się sprawdzania samych siebie, w celu uniknięcia błędów. Oto na przykład zadanie, które można wykorzystać na lekcji matematyki w klasie pierwszej szkoły średniej. Znajdź błędy w poniższym rozumowaniu:

Rozumowanie 1[24]

Ponieważ oczywiste jest, że

$$k^2 - k^2 = k^2 - k^2,$$

zatem wyłączając k jako wspólny czynnik przed nawias po lewej stronie równości mamy:

$$L = k\,(k - k),$$

z kolei wyrażenie po prawej stronie przekształcimy zgodnie ze wzorem na różnicę kwadratów, czyli

$$a^2 - b^2 = (a - b)\,(a + b).$$

Prawą stronę równości możemy więc zapisać następująco:

$$P = (k + k)\,(k - k).$$

Zatem, skoro $L = P$ mamy:

$$k\,(k - k) = (k + k)\,(k - k).$$

Dzieląc teraz obie strony równości przez $(k - k)$ otrzymujemy, że:

$$k = k + k, \text{ czyli } k = 2k,$$

skąd po podzieleniu obu stron równości przez k dostajemy:

$$1 = 2.$$

Zatem, wykazaliśmy, że liczby 1 i 2 są sobie równe.

Oczywiście, błąd w tym przykładowym rozumowaniu polega na podzieleniu początkowo prawidłowo przekształconej równości przez wyrażenie $k - k$, które w rzeczywistości jest zerem. Odkrycie tego błędu przez uczniów może stać się powodem do jego naprawienia, a nawet ciekawej dyskusji na temat: „Dlaczego nie można dzielić przez zero?”, której konkluzją powinno być to, że dzielenie przez zero jest niewykonalne. Szczegółowej odpowiedzi

[24] Opracowanie własne.

na to pytanie udziela na przykład autor artykułu zatytułowanego: „Dlaczego nie dzielimy przez zero?[25], czy też M. Mikołajczyk w opublikowanym na stronie Wrocławskiego Portalu Matematycznego artykule, zatytułowanym: „Dlaczego nie można dzielić przez zero?”[26]. Nawet sam H. Steinhaus podkreśla wagę wykorzystania błędów do celów dydaktycznych. W swojej pracy[27] podaje przykład sytuacji, w której studentowi dano za zadanie znaleźć błąd w rozprawie, zapewniwszy go, że błąd tam jest. Wykonanie tej samodzielnej pracy nie dość, że daje niemałą dozę satysfakcji, to równocześnie upewnia, że jeżeli przejdzie krok za krokiem cały łańcuch dowodzeń, musi znaleźć pęknięte ogniwo. W tej sytuacji, jak podkreśla autor, nie żąda się od studenta wynalazczości, ale uzyskuje gwarancję, że przeczytaną rzecz doskonale zrozumiał i zgłębił. Kolejnym, trudniejszym już, ćwiczeniem dla studenta może być polecenie naprawienia znalezionego błędu. O ile błąd ten polega tylko na przeoczeniu autora i ma charakter nieistotny, wówczas i to zadanie da się rozwiązać. Kolejne ćwiczenie, zaproponowane przez H. Steinhausa, może stanowić konstrukcja kontrprzykładu na błędne twierdzenia, czyli takiego przedmiotu matematycznego, który ma wszystkie własności wypowiedziane w założeniu, a nie posiada własności wypowiedzianych w twierdzeniu. Taki kontrprzykład najjaśniej ukazuje fałszywość twierdzenia.

Warto jeszcze zastanowić się, choć przez chwilę, jak minimalizować liczbę błędów powstających w rozumowaniach matematycznych? I znów nie chodzi tu o podejmowane próby zaniechania powstawania błędów rachunkowych, a tych z punktu widzenia matematyki bardziej istotnych. Toteż, w przypadku uczniowskich błędów powstających w procesie uczenia się matematyki istotne ze strony nauczyciela są: refleksja nad ich charakterem, jak również stwarzanie sytuacji dydaktycznych mających na celu dokonanie „terapii” błędów, czy też poszukiwanie błędów. Oczywiście, dokonać tego może tylko ten nauczyciel, który sam doskonale matematykę rozumie. Z kolei, w przypadku błędów popełnianych przez autorów publikacji matematycznych, jak radzi H. Steinhaus[28], należy dążyć do zupełności, pozwalając sobie na skoki tylko tam, gdzie opieramy się na lematach powszechnie znanych i niezależnie udowodnionych przez wielu matematyków. Warto również, jak podkreśla autor, unikać lematów nieudowodnionych, nawet gdyby były pozornie najjaśniejsze i najmniej wątpliwe, jak również zdawać sobie sprawę z definicji wprowadzanych pojęć i nie używać w dowodzie żadnych pojęć,

[25] Młody technik, https://mlodytechnik.pl/eksperymenty-i-zadania-szkolne/matematyka/28548-dlaczego-nie-dzielimy-przez-zero, [dostęp: 12.02.2022].

[26] M. Mikołajczyk, *Wrocławski Portal Matematyczny*, http://matematyka.wroc.pl/doniesienia/klopotliwe-pytania-5-dlaczego-nie-mozna-dzielic-przez-zero, [dostęp: 12.02.2022].

[27] H. Steinhaus, *Błędy w matematyce*, s. 106-107.

[28] Tamże, s. 107-108.

oprócz tych wypowiedzianych w definicji. Dowody opierać na aksjomatach wyraźnie sformułowanych w podstawach teorii. Wspomina także o wartości kompletnych dowodów z użyciem symboliki, stanowiących dość radykalne lekarstwo na błędy w matematyce, które z jednej strony ją leczy, z drugiej zaś sprowadza jej uprawianie do bardzo żmudnego zajęcia. Ponadto, również symbolizm może stać się źródłem nowych błędów – pomyłek w symbolach. Dlatego, powyższe cenne rady powinno się stosować, ale oczywiście zawsze w połączeniu z rozsądkiem.

Na zakończenie należy wspomnieć, że błędy należy eliminować, a najlepiej ich unikać, aczkolwiek jeśli zostaną już popełnione, nie muszą przynosić wielkiej szkody, a wręcz przeciwnie – mają nawet szansę przyczynić się do rozwoju. Dlatego, warto podchodzić do nich w odpowiedni sposób i, tam gdzie można, próbować wykrzesać z nich coś pozytywnego. Jest to rada dla wszystkich osób zajmujących się edukacją, czy też nauką na każdym poziomie.

BIBLIOGRAFIA

Bondecka-Krzykowska I., *O dowodzeniu twierdzeń*, Poznański Portal Matematyczny, https://matematyka.poznan.pl/artykul/o-dowodzeniu-twierdzen/, [dostęp: 10.02.2022].
Błogosławiony błąd – definicja, https://pl.wikipedia.org/wiki/Błogosławiony_błąd#cite_note-kiosk-4, [dostęp: 12.02.2022].
Ciosek M., *Błędy popełniane przez uczących się matematyki i ich hipotetyczne przyczyny*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, 1992, 13, 01.
Douady R., Perrin M.J., *Aires de surfaces planes*, Petit, 1984, X 6.
Grcar J.F., *Errors and Corrections in Mathematics Literature*, https://www.ams.org/notices/201304/rnoti-p418.pdf, [dostęp: 12.02.2022].
Krygowska A.Z., *Comprendre l'erreur en metématiques*, [w:] *Rôle de 1*erreur dans 1*l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique*, les Éditions de l'Université de Sherbrooke (polskie tłumaczenie w Dydaktyce Matematyki, 1988, 10).
Legutko M., *O podręczniku matematyki*, Dydaktyka Matematyki, 1992, 23.
Mikołajczyk M., *Wrocławski Portal Matematyczny*, http://matematyka.wroc.pl/doniesienia/klopotliwe-pytania-5-dlaczego-nie-mozna-dzielic-przez-zero, [dostęp: 12.02.2022].
Młody technik, https://mlodytechnik.pl/eksperymenty-i-zadania-szkolne/matematyka/28548-dlaczego-nie-dzielimy-przez-zero, [dostęp: 12.02.2022].
Mnich W., *O zadaniach na poszukiwanie błędu*, Matematyka, 1978, 2.
Mnich W., *O błędach w rozumowaniu uczniów*, Matematyka, 1978, 3.
Mnich W., *Aktywności matematyczne jako kryterium doboru zadań w nauczaniu matematyki* (rozprawa doktorska), WSP w Krakowie, 1980.
Orzeszek A., *Wykorzystać niezaplanowane sytuacje*, Nauczanie Matematyki, 2007, 8.
Paradoks Banacha-Tarskiego – twierdzenie, https://pl.wikipedia.org/wiki/Paradoks_Banacha-Tarskiego, [dostęp: 12.02.2022].
Serafin S., Terliński G., *Zbiór zadań z matematyki elementarnej. Geometria*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1976.
Siu M.K., *Mathematiques = Demonstration?*, APMEP, Bulletin, 2001, 434.

Statystyki cz. korespondencyjnej XVII Olimpiady Matematycznej Juniorów, https://www.omj.edu.pl/uploads/attachments/koresp21.pdf , [dostęp: 12.02.2022].

Steinhaus H., *Błędy w matematyce*, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, 1969, Wiadomości Matematyczne XI, Seria II.

Turnau S., *O dowodzeniu twierdzeń we współczesnej szkole*, https://matematyka.up.krakow.pl/konfer/dydaktyka/dm23/turnau.htm, [dostęp: 11.02.2022].

Zbieżność jednostajna, https://mathoverflow.net/questions/879/most-interesting-mathematics-mistake, [dostęp: 11.02.2022].

Zbieżność punktowa, https://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_convergence#History, [dostęp: 11.02.2022].